ESTABILIDAD

DE LAS

CONSTRUCCIONES

DE

MAMPOSTERÍA

POR

E. BOIX

INGENIERO JEFE DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

TEXTO

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE G. JUSTE

Calle de Pizarro, núm. 15, bajo

1889

PRÓLOGO

Responde esta obra á un objeto principalmente práctico. Me he propuesto, al escribirla, presentar una serie de fórmulas y procedimientos gráficos muy sencillos, que permitan fijar con rapidez la forma y dimensiones más convenientes para una construcción de fábrica, dadas las condiciones á que ha de satisfacer y las circunstancias de localidad, á fin de conseguir la debida resistencia á los esfuerzos á que se halla sometida, y á la par una prudente economía de material.

Los numerosos é interesantes estudios que se han publicado sobre resistencia de las construcciones de mampostería no descienden suficientemente, á mi modo de ver, de las consideraciones teóricas necesarias al terreno práctico, en lo relativo á la sencillez de las aplicaciones, objeto preferente que intento conseguir.

Pero no consideraría mi trabajo verdaderamente útil, si dichas fórmulas y procedimientos no inspirasen

completa confianza á los constructores que han de emplearlas; de aquí se deduce la necesidad de demostrar su grado de exactitud. Con este motivo, comparo los resultados que proporcionan con los obtenidos mediante el empleo de las fórmulas exactas derivadas de la teoría. Estos últimos resultados han sido calculados para gran número de casos, comprendiendo los que con más frecuencia ocurren en la práctica, y al mismo tiempo, para facilitar la comparación, se han dispuesto en forma de cuadros ó estados.

Además, siempre que ha sido posible, he comparado también las citadas fórmulas prácticas con otras varias de distintos autores conocidos, así como con los resultados de experiencias, y por último, con los datos de ejecución de diferentes obras, cuyo mérito ha sido sancionado por el tiempo.

Las expresiones teóricas presentan siempre alguna complicación, y para sustituirlas por fórmulas sencillísimas, como las que propongo, debe sacrificarse forzosamente en algún tanto la exactitud; pero según se verá, la diferencia en los resultados no ofrece en general, y entre los límites de disposiciones más usuales, gran importancia en la práctica. Serán, pues, estas últimas fórmulas perfectamente admisibles en la mayoría de los casos, especialmente para fijar con rapidez la forma y disposiciones de una construcción en proyecto, mientras que las expresiones teóricas tendrán aplicación, en el modo que se indica en los correspondientes capítulos, á aquellas obras que, por sus condiciones ó importancia especiales, merezcan estudiarse con detenimiento, ó cuyos cálculos de resistencia deban someterse á la administración superior.

Entre la gran diversidad de construcciones de

mampostería, existen dos grupos principales, que han fijado constantemente la atención de los hombres de ciencia. Constituyen estos dos grupos: por una parte, los muros de sostenimiento ó de contención, y por otra, las bóvedas. Mucho se ha escrito sobre una y otra clase de obras, y varias son las teorías relativas á su estabilidad publicadas por distinguidos Ingenieros, con el deseo de aclarar una cuestión de por sí algo oscura, haciendo á la par ostentación de extensos y profundos conocimientos.

Pero el gran número de estos trabajos, número que aumenta de año en año, da á conocer el interés y las dificultades inherentes al problema que trata de resolverse, el cual no ha obtenido aún solución completamente satisfactoria. Proceden las dificultades del sinnúmero de elementos variables y accidentales que intervienen en la cuestión, de su apreciación inexacta, de las distintas relaciones que guardan entre sí, etcétera. Pero aun suponiendo que pudieran tenerse en cuenta todos estos elementos con la suficiente exactitud, siempre darían lugar á expresiones muy complicadas y de una aplicación sumamente penosa.

Para simplificar el problema se prescinde de alguno de estos elementos, admitiéndose al mismo tiempo ciertas hipótesis más ó menos conformes con la realidad de los hechos; pero se llega así, como es natural, á teorías incompletas. Sin embargo, demuestra la experiencia que los conocimientos adquiridos hasta hoy día sobre el asunto, permiten disponer una obra con la debida resistencia y una prudente economía de material.

Creo que debe mirarse con cierta prevención el problema perseguido por algunos, respecto á determi-

nar el mínimo volumen preciso de fábrica que debe asignarse á una obra de forma dada. En el estado actual de la ciencia, la solución, no solo es dudosa, sino que puede acarrear consecuencias muy sensibles para el Ingeniero.

Entre las varias teorías publicadas sobre resistencia de las construcciones de mampostería, he escogido aquellas que considero más aceptables bajo el punto de vista de las aplicaciones. Así, pues, en lo referente á muros de sostenimiento, no he vacilado en adoptar la antigua de *Coulomb*. Por más que algunos la califican de «teoría vieja de un siglo, y que solo se admitió en su origen como una aproximación, ínterin se reuniesen los datos necesarios», lo cierto es que en el gran intervalo de tiempo transcurrido poco se ha adelantado en la materia, por lo menos en lo concerniente á la cuestión práctica, pues las numerosas modificaciones que con el mejor deseo se ha tratado de introducir en dicha teoría, sólo sirven para complicar inútilmente el problema y reducir la generalidad de las aplicaciones.

Esta teoría, con todos sus defectos, que reconozco, es, á mi modo de ver, perfectamente admisible. La cuestión, por resolver, contendrá siempre una parte incierta, englobada, digámoslo así, con cierto coeficiente de resistencia superior á uno; es, por lo tanto, inútil esforzarse en afinar un resultado que no por esto será más aproximado á la verdad.

El objeto que debe proponerse el Ingeniero encargado de disponer una construcción no es precisamente, según entiendo, determinar su resistencia *absoluta* á los esfuerzos á que se halla sometida; la solución será siempre dudosa entre ciertos límites. Pero convendrá en todo caso estudiar las relaciones de estabi-

lidad existentes entre varias obras análogas destinadas á un mismo fin, con distintas disposiciones de forma y dimensiones, á fin de escoger la que satisfaga convenientemente al objeto con el menor gasto. Bajo este punto de vista, la teoría de Coulomb se presta cumplidamente á dicho estudio.

Para las bóvedas he dado la preferencia á la teoría expuesta por el eminente Ingeniero Dupuit, no sólo por considerarla más racional en principio que las demás conocidas, sino también por los interesantísimos desarrollos que le ha dado su autor. Al ocuparme de esta teoría me haré cargo de las objeciones presentadas á la misma por varios Ingenieros; examinaré también ligeramente algunas de las demás teorías conocidas, viendo, al mismo tiempo, hasta dónde resuelven unas y otras el problema de la resistencia de las bóvedas.

Juzgo inútil exponer el plan seguido en esta obra, pues puede verse con todo detalle y claridad en el índice explicativo; observaré únicamente que he dedicado todo un capítulo, el tercero, titulado: «Observaciones preliminares sobre la aplicación de los muros de sostenimiento», á justificar la supresión en los cálculos del rozamiento de las tierras sobre el paramento interior del muro, y también á discutir algunas reglas y procedimientos propuestos por varios autores.

En lugar oportuno se indican las publicaciones que me han servido de consulta; pero desde luego mencionaré dos, de las cuales he extractado mucho, y son: la obra de M. Colignon, *Cours de mécanique appliquée aux constructions; Résistance des materiaux,* en lo relativo á empuje de tierras; y la de Dupuit, *Traité de l'équilibre des voutes et de la construction*

des ponts en maçonnerie, en la parte concerniente á teoría de bóvedas.

Mi trabajo especial, principalmente afecto á las aplicaciones, ha resultado algo penoso por los muchos estados que he debido calcular; pero lo daré por bien empleado si, como deseo, es de alguna utilidad á los que se dedican á las construcciones.

E. Boix.

ÍNDICE

Págs.

CAPÍTULO PRIMERO

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

CAPÍTULO VI

CAPÍTULO VII

Págs

CAPÍTULO VIII

CAPÍTULO PRIMERO

PRINCIPIOS GENERALES SOBRE LA ESTABILIDAD DE LOS MACIZOS DE MAMPOSTERÍA.

---

1. Bajo la denominación de mampostería debe comprenderse todo macizo compuesto de piedras naturales ó artificiales, de forma más ó menos regularizada, y unidas, en la mayoría de los casos, con la mezcla llamada mortero. Se aplica, pues, esta definición á la mampostería ordinaria ó de relleno, á la concertada, á la sillería, y también á la fábrica de ladrillo ó de hormigón.

Existe una diferencia muy esencial entre los macizos de mampostería y los cuerpos elásticos empleados en las construcciones, tales como la madera y el hierro; estos últimos resisten á la extensión lo mismo que á la compresión, mientras que los primeros no son susceptibles de oponerse á los esfuerzos que tienden á desagregarlos, sino en grado relativamente pequeño. El mortero constituye la parte más débil de la mampostería, y aunque con el tiempo llega aquél á adquirir alguna consistencia, no es ésta por lo regular muy considerable; semejante circunstancia, y la necesidad de prever el caso en que la mezcla no ha tenido tiempo de fraguar en el momento en que se somete el macizo á la acción de los esfuerzos á que ha de resistir, justifica la determinación que han tomado la mayor parte de los constructores de prescindir en sus cálculos de la cohesión de la fábrica.

2. Toda construcción de mampostería, aunque esté debidamente cimentada, puede perder el equilibrio en virtud de un movimiento de giro, ú obedeciendo á un movimiento de traslación, ó finalmente, á consecuencia del aplastamiento de una parte de sus materiales. Exige, pues, la estabilidad que dicha construcción se halle debidamente dispuesta, como forma, como dimensiones y según sean los materiales de que se compone, para que resista á cualquiera de estos tres movimientos, que iremos examinando sucesivamente.

MOVIMIENTO DE GIRO

3. Sea ABCD (figura 1.ª) la sección recta de un cuerpo prismático, sometido á la acción de su propio peso P y al de una fuerza exterior F. Supondremos que esta última fuerza, lo mismo que la primera, tienen una intensidad proporcional á la longitud del cuerpo, medida en sentido normal á la sección; de manera que las condiciones de equilibrio no varían, sea cual fuere esta longitud, que podremos tomar igual á la unidad. La fuerza F será la resultante de una serie de acciones parciales que obran sobre cierta extensión más ó menos considerable del paramento BC.

Si suponemos que el cuerpo constituye un monolito, descansando por su base sobre un apoyo cualquiera incompresible, es evidente que la fuerza exterior tenderá á hacerle girar con una intensidad proporcional al producto de esta fuerza por su brazo de palanca DE. A este movimiento se opone el peso P con un brazo de palanca DM, lo cual supone que GM es la vertical del centro de gravedad de la sección. Estableciendo la igualdad de estos dos momentos, obtendremos el equilibrio inestable; en este caso, si se compone la fuerza F con el peso P, se halla una resultante que pasa por el punto D de giro.

En la práctica hay que disponer las construcciones de manera que ofrezcan un exceso de estabilidad; será, pues, necesario que el momento de la fuerza exterior sea menor que el momento del peso del macizo, lo cual tendrá lugar si la resul-

tante de estas dos fuerzas corta á la base en su interior, verificándose entonces la ecuación

$$P \times DM = F \times DE \times c,$$

siendo c una cantidad mayor que la unidad y que se denomina *coeficiente de estabilidad de giro* ó simplemente *coeficiente de estabilidad.*

La anterior relación ha de quedar satisfecha dando al macizo la debida forma y dimensiones. Con respecto al coeficiente c, diremos que es susceptible de variar, según las condiciones en que se halle la construcción; con él debe atenderse á la imperfección de la teoría y de los datos y experiencias prácticas que concurren á la evaluación de los esfuerzos que actúan; hay que tener en cuenta también las variaciones que pueden experimentar estos esfuerzos en virtud de causas más ó menos presumibles, que pocas veces son susceptibles de apreciarse con exactitud. El coeficiente de estabilidad no suele ser inferior á 1,5; en muchos casos que ocurren en la práctica se toma igual á 2.

Haremos presente, además, que este coeficiente se halla subordinado á los otros dos movimientos que puede experimentar el macizo; es decir, que si consideramos dos construcciones de distinta importancia, podrá ser suficiente para una de ellas cierto coeficiente que dé lugar á la debida estabilidad, considerada bajo todos los puntos de vista; mientras que para la otra no queden satisfechas las condiciones de resistencia al deslizamiento ó al aplastamiento, sino partiendo de un nuevo coeficiente de giro mayor que el primero.

Hemos supuesto que el cuerpo constituía un monolito; pero si admitimos que está formado por hiladas horizontales, y si además prescindimos de la cohesión del mortero en las juntas de separación ó lechos de asiento, se comprende que habrá que atender á la posibilidad del giro alrededor de una cualquiera de las aristas exteriores de estos lechos. En el caso en que, por ejemplo, la sección tuviera la forma que indica la fig. 2.ª, será

conveniente cerciorarse de que el movimiento de giro alrededor de la arista M, se halla debidamente contrarrestado.

MOVIMIENTO DE RESBALAMIENTO

4. Consideraremos siempre el mismo cuerpo (fig. 1.[a]), admitiendo que descansa simplemente sobre el plano de apoyo. La componente horizontal F_h de la fuerza exterior tiende á hacer resbalar el cuerpo sobre dicho plano; pero este movimiento experimenta una resistencia procedente del rozamiento desarrollado en la base, y que, como es sabido, tiene una intensidad proporcional á la carga que actúa sobre ella. Esta carga se compone del peso del macizo, al cual hay que agregar la componente vertical F_v de la fuerza exterior. Llamando ΣP la suma de estas acciones verticales, y designando por f el coeficiente de rozamiento, es decir, la fuerza paralela á la base, necesaria para producir el deslizamiento de un cuerpo de la misma naturaleza sometido á una carga normal igual á la unidad, tendremos para la intensidad de la fuerza resistente que se opone á la traslacion del macizo un valor representado por

$$f \times \Sigma P.$$

La estabilidad, bajo el punto de vista del deslizamiento, exige que se verifique

$$F_h < f \times \Sigma P.$$

En las construcciones de fábrica, la fuerza horizontal F_h se halla contrarrestada, no sólo por el rozamiento propiamente dicho $f\Sigma P$, sino también por la cohesión que existe cuando las superficies en contacto se hallan separadas por una capa más ó menos adherente, como sucede con el mortero. La resistencia debida á la cohesión es proporcional á estas superficies, pero independiente de la presión. Llamando γ á su intensidad por

unidad superficial, y Ω al área de la superficie, debe verificarse

$$F_h < f\Sigma P + \gamma\Omega.$$

Por lo regular, se prescinde en la práctica de la cohesión, según hemos dicho; pero en este caso á veces se aumenta en cambio en algún tanto el coeficiente de rozamiento.

Los valores de f y de γ dependen de la naturaleza de las superficies y cuerpos en contacto, y proceden de experiencias hechas por varios constructores. Su resultado se indica en el siguiente cuadro, que hemos extractado del formulario de M. Claudel.

NÚMERO 1.

CUADRO *de resistencias de resbalamiento al iniciarse el movimiento y algún tiempo después del contacto.*

PRIMERA PARTE.—Rozamiento propiamente dicho.

NATURALEZA DE LOS CUERPOS Y DE LOS ENLUCIDOS.	Autores de las experiencias.	Relación del rozamiento á la presión.
Arenisca lisa sobre arenisca lisa, en seco.	Rennie.	0,71
Arenisca lisa sobre arenisca con mortero blando.	Id.	0,66
Caliza dura pulimentada sobre caliza dura pulimentada.	Rondelet.	0,58
Caliza abujardada sobre íd. abujardada.	Boistard.	0,78
Granito bien labrado sobre granito abujardado.	Rennie.	0,66
Los mismos con mortero fresco. . . .	Id.	0,49
Caja de madera sobre adoquinado. . .	Régnier.	0,58
Idem íd. sobre tierra apisonada.. . .	Hubert.	0,33
Mampuestos sobre una capa de arcilla seca.	Lesbros.	0,51
Mampuestos sobre arcilla húmeda y reblandecida.	Id.	0,34
Mampuestos sobre arcilla húmeda recubierta con grava gruesa.	Id.	0,40

SEGUNDA PARTE.—Cohesión ó adherencia.

La rotura puede verificarse en el interior de la capa de mortero, ó en la unión de la capa de yeso con las piedras; en el primer caso la resistencia es debida á la cohesión; en el segundo á la adherencia.

NATURALEZA DE LOS CUERPOS Y DE LOS ENLUCIDOS.	Autores de las experiencias.	Superficies en decímetros cuadrados.	Días de contacto con el aire ó con el agua.	Resistencia media por metro cuadrado.
Caliza abujardada sobre la misma, con mortero de cal grasa y arena fina.	Boistard.	1 á 2	17 con el aire	6 600 k.
		3 á 5	Id.	9.400
		47	48 con agua.	1.200
La misma con mortero de cal grasa y cemento..	Id.	1 á 2	17 con el aire	3 200
		3 á 5	Id.	5.300
La misma con mortero de cal grasa y cemento sin batir..	Id.	47	48 con agua.	1.100
Caliza blanda de Jaumont sobre la misma, con mortero de cal hidráulica de Metz y arena fina..	Morín.	1 á 2	83 con el aire	18.000
		2 á 3	48 íd.	12.000
		Id.	43 íd.	10.100
		4 á 6	48 íd.	10.000
		7 á 8	48 íd.	9.400
Ladrillos ordinarios unidos con el mismo mortero.	Id.	1,3	48 íd.	14.000
		2,6	48 íd.	10.000
Caliza de Jaumont unida á la misma con yeso común.	Id.	2,0	48 íd.	22.000
		8,0	48 íd.	28.000
Caliza azul grafito unida á la misma con yeso. . .	Id.	2,5	48 íd.	11.000
		4,5	48 íd.	20.000

El coeficiente 0,78, relativo á la piedra abujardada sobre la misma, sobrepuja de fijo á la unidad, cuando los planos de juntar están unidos con mortero de mediana calidad, cuya adherencia se añade al rozamiento.

Se toma generalmente 0,76 para el valor del coeficiente de rozamiento de la mampostería sobre la misma. A consecuencia de varias observaciones, se disminuye este valor, adoptando 0,57 en el caso de ser el mortero reciente, y por el contra-

rio, se aumenta hasta 1,00 si el mortero ha llegado á fraguar, haciendo lo mismo para la sillería.

El mismo valor 0,76 se atribuye también al coeficiente de rozamiento de un muro ó de un macizo sobre su fundación, cuando el apoyo es roca natural ó cuando está formado por hormigón; se toma 0,57, si el macizo descansa sobre un suelo natural de piedra ó arena, y 0,30 próximamente, en el caso de un fondo arcilloso que puede ser reblandecido por el agua.

La cohesión de un macizo sobre una base de hormigón es susceptible de variar entre 10.000 y 14.000 kilogramos por metro cuadrado, según la calidad del mortero; pero por lo regular no se tiene en cuenta esta cohesión en el establecimiento de los muros ó macizos sometidos á un esfuerzo horizontal, como son los muros de sostenimiento y los estribos de las bóvedas, en atención á que puede no haber fraguado por completo el mortero al tiempo de empezar á actuar el empuje. La cohesión de la mampostería sobre un suelo natural de tierra ó de arena es nula.

Se deduce de las anteriores indicaciones que, salvo los casos en que la fundación no descansa sobre la roca, puede adoptarse la unidad para el coeficiente de rozamiento; es decir, que no es de temer se verifique el deslizamiento, siempre que la carga sea por lo menos igual al empuje horizontal. Este coeficiente es aplicable á los lechos de la sillería, y con mayor motivo á las secciones horizontales hipotéticas de un macizo de mampostería ordinaria, sobre todo si, como debe hacerse, se ha procurado trabar los mampuestos en todos sentidos, evitando ejecutar la fábrica por tongadas enrasadas á nivel.

El movimiento de deslizamiento, lo mismo que el de giro, han de estar contrarrestados en cualquiera de las hiladas de que se compone el macizo. Advertimos, además, que si el empuje actúa en la parte superior, como sucede en los estribos de los puentes, habrá que cerciorarse de la estabilidad de deslizamiento para la hilada inmediatamente inferior al punto de aplicación de esta fuerza, puesto que hallándose imposibilitado el movimiento en dicha hilada, con mayor motivo lo estará en las

que se encuentran por debajo; éstas dan lugar á un aumento de peso, y por tanto, hacen crecer el rozamiento. Entiéndase que esta observación no es aplicable al fondo de la cimentación, en donde el rozamiento puede ser menor.

MOVIMIENTO DE APLASTAMIENTO

5. Hemos visto que la condición de estabilidad relativa al giro de un cuerpo alrededor de la arista de la base quedaba satisfecha, cuando la resultante de todos los esfuerzos que actúan sobre este cuerpo cortaba á dicha base en su interior. Si en el punto de encuentro descomponemos la resultante en una fuerza horizontal y en otra vertical, tendremos para la primera el empuje F_h que tiende á producir el deslizamiento, y para la segunda la suma de las acciones verticales $P + F_v = \Sigma P$, que dan lugar al rozamiento. Pero estas mismas acciones verticales comprimen la base del macizo sobre el plano de apoyo, y se concibe que esta compresión no debe ser superior al esfuerzo capaz de ocasionar el aplastamiento de los materiales, y por lo tanto, la pérdida de equilibrio.

Si el esfuerzo ΣP pasa por el centro de gravedad de la base, la compresión se verificará por igual en toda su extensión, y la relación

$$\frac{\Sigma P}{\Omega} = \rho$$

entre la carga y la superficie Ω de la base dará la *presión unitaria* que designamos por ρ. Esta presión constituye la medida del trabajo que sufre el material.

Cuando la resultante ΣP no pasa por el centro de gravedad, su efecto no es ya el mismo; se concibe que habrá puntos de la base que se hallen sometidos á una mayor compresión que otros. Esta compresión variable puede suponerse constante en la extensión de un elemento superficial infinitamente pequeño, y si se divide el esfuerzo que recibe este elemento por su

área, obtendremos siempre el valor de la presión unitaria en el punto considerado. La estabilidad del macizo exige, que el máximum de presión unitaria que sufre la base sea inferior á la resistencia al aplastamiento de los materiales de que se compone el cuerpo.

En vez de considerar la base del macizo, podemos aplicar el mismo razonamiento á una sección horizontal situada á cualquier altura, debiendo verificarse siempre que la máxima presión unitaria no ha de exceder de la que puede resistir la fábrica.

Se deduce de las consideraciones que anteceden, que para hallar las condiciones de equilibrio de un macizo, bajo el punto de vista de la resistencia al aplastamiento, es necesario, por de pronto, conocer la ley de repartición de las presiones ejercidas sobre la sección de un cuerpo, según la posición que tenga la resultante de estas presiones. De esto vamos á ocuparnos.

REPARTICIÓN DE LAS PRESIONES SOBRE LA SECCIÓN HORIZONTAL DE UN CUERPO.

6. Consideremos una sección MN, M'N' de un sólido ABCD (fig. 3.ª), cuya parte superior al plano MN se halla sometida á una fuerza vertical P, que corta á dicho plano en el punto E, E'. Tomemos en el mismo plano dos ejes rectangulares OX, OY, y designemos por x_1 y_1 las coordenadas del punto E', y por ρ la presión unitaria ejercida en un punto cualquiera L de la sección. El valor de la presión ρ dependerá de la posición del punto L, es decir, de sus coordenadas x, y; será una función de estas variables y podremos representar el esfuerzo ejercido sobre el elemento superficial situado en L, por $\rho\, dx\, dy$. Para todos los demás puntos de la sección tendremos esfuerzos análogos y su conjunto deberá hacer equilibrio á la fuerza P.

Esto exige, como es sabido, tres ecuaciones, la de las

fuerzas y las dos ecuaciones de momentos con respecto á los ejes OX, OY; lo que motiva las tres relaciones

$$\mathrm{P} = \int\int \rho\, dx\, dy$$

$$\mathrm{P}y_1 = \int\int \rho\, y\, dx\, dy$$

$$\mathrm{P}x_1 = \int\int \rho\, x\, dx\, dy;$$

las integrales se extienden á todos los elementos de la sección.

No conocemos el valor variable de ρ, que es una función de x, y; pero podemos considerar este valor como el de la ordenada vertical de una superficie $\rho = f(x, y)$, cuyas coordenadas horizontales están tomadas en el plano de la sección. Las tres ecuaciones que anteceden pueden entonces interpretarse geométricamente de un modo muy sencillo.

La primera indica que el volumen comprendido entre la superficie $\rho = f(x, y)$, el plano de la sección y las generatrices del cilindro proyectado según el contorno M'N', es igual á P.

Las otras dos expresan que el centro de gravedad de este volumen se halla situado sobre la vertical del punto E', que es la vertical de la fuerza P.

El problema se reduce á construir una superficie tal, que el volumen cilíndrico comprendido entre la misma y la sección M'N' sea igual á un número dado, y que el centro de gravedad de este volumen se proyecte sobre la sección M'N' en un punto E'. Es evidente que puede resolverse de una infinidad de maneras este problema de geometría.

Sin embargo, en realidad y bajo el punto de vista físico, la repartición de las presiones no es arbitraria, debiendo obedecer á una ley desconocida y que difícil sería determinar por medio de observaciones directas. Para allanar esta dificultad, se recurre á una hipótesis, que consiste en suponer que la superficie $\rho = f(x, y)$ es plana, ó lo que es lo mismo, que ρ es función lineal de x y de y. La ecuación general del plano es

$$\rho = ax + by + c,$$

en la que a, b y c representan tres constantes desconoci das, pero que pueden determinarse valiéndose de las tres ecuaciones generales de equilibrio.

Si en estas tres ecuaciones reemplazamos ρ por el valor anterior, hallaremos, sacando las constantes fuera de los signos de doble integración,

$$a\int\int x\,dx\,dy + b\int\int y\,dx\,dy + c\int\int dx\,dy = P$$

$$a\int\int xy\,dx\,dy + b\int\int y^2\,dx\,dy + c\int\int y\,dx\,dy = Py_1$$

$$a\int\int x^2\,dx\,dy + b\int\int x\,y\,dx\,dy + c\int\int x\,dx\,dy = Px_1.$$

Estas ecuaciones son de primer grado en a, b, c, y las dobles integrales podrán efectuarse según la forma que tenga la sección M'N'. Será, pues, fácil resolverlas, hallar a, b, c en función de P, x_1, y_1 y de las integrales, y por último, introducir los valores de a, b, c en la expresión de ρ, con lo cual la cuestión queda enteramente resuelta.

Podemos también representar gráficamente la hipótesis de que nos hemos valido. Supóngase, para esto, que el cuerpo sobre que descansa el macizo tiene cierta elasticidad, y que la base del macizo, sin perder su forma plana, penetra en este cuerpo, introduciéndose en mayor cantidad, como es natural, del lado más próximo á la resultante. La elasticidad del apoyo desarrollará una serie de reacciones elementales, que referidas á la unidad superficial, representarán los valores de ρ, y serán respectivamente proporcionales á las ordenadas verticales comprendidas entre las dos posiciones de la base.

Si trazamos un plano vertical que pase por la resultante, este plano cortará á las dos posiciones de la base, según dos rectas MN, M'N' inclinadas entre sí (fig. 4.ª); rectas que, en unión con las ordenadas extremas MM' y NN', determinan un trapecio, lo que motiva la denominación de *ley del trapecio* dada á la hipótesis que sirve de base á los cálculos.

Trazando una serie de planos paralelos á la primitiva posición de la base obtendremos, en el plano de la segunda posición, intersecciones rectilíneas, cuya ecuación será de la forma

$$ax + by + c = \rho_1,$$

designando por ρ_1 la distancia de cada plano secante á la primera posición. Estas líneas, paralelas todas entre sí, constituyen líneas de igual presión y se denominan *líneas isopiézicas*. Cabe considerar entre estas líneas la que forma la intersección de las dos posiciones de la base, y que tiene por ecuación

$$ax + by + c = 0,$$

que es representativa de la línea de presiones nulas.

7. Las ecuaciones de equilibrio que anteceden son susceptibles de simplificarse, mediante una conveniente elección de ejes coordenados. Tomando por origen el centro de gravedad de la sección M'N', tendremos por de pronto

$$\int\int y\, dx\, dy = 0 \qquad \text{y} \qquad \int\int x\, dx\, dy = 0;$$

ecuaciones que representan la suma de momentos de las superficies elementales con respecto á los ejes coordenados. En virtud de estas relaciones, desaparecen los términos en a y b de la primera ecuación de equilibrio, y también los términos en c de las otras dos.

La expresión $\int\int dx\, dy$ representa el área de la sección que llamaremos Ω; queda, pues, reducida la primera ecuación de equilibrio á

$$c = \frac{P}{\Omega},$$

lo que indica que el coeficiente c es igual á la presión media. Las sumas $\int\int y^2 dx\, dy$, $\int\int x^2 dx\, dy$, reciben en mecánica

racional la denominación de *momentos de inercia* de la sección con respecto á los ejes OX, OY; representaremos estos momentos por I_x, I_y. Finalmente, podemos hacer desaparecer el término $\int\int xy\, dx\, dy$, dando una direccón conveniente á los ejes coordenados rectangulares.

En efecto; si hacemos girar en su plano y de un ángulo α los antiguos ejes X′Y′ hasta que tomen la posición XY (figura 5.ª), existirán entre las coordenadas primitivas y las nuevas las relaciones

$$x = x' \cos.\, \alpha - y' \operatorname{sen.} \alpha$$

$$y = x' \operatorname{sen.} \alpha + y' \cos.\, \alpha,$$

de donde resulta, multiplicando;

$$xy = x'^2 \cos.\alpha \operatorname{sen.}\alpha - y'^2 \cos.\alpha \operatorname{sen.}\alpha + x'y' (\cos.^2\alpha - \operatorname{sen.}^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} (x'^2 - y'^2) \operatorname{sen.} 2\alpha + x'y' \cos.\, 2\alpha;$$

y por lo tanto,

$$\int\int xy\, dx\, dy = \frac{1}{2} \operatorname{sen.} 2\alpha \left(\int\int x'^2\, dx\, dy - \int\int y'^2\, dx\, dy\right)$$

$$+ \cos.\, 2\alpha \int\int x'y'\, dx\, dy.$$

Es evidente que se anulará el primer miembro de la ecuación que precede, si se da al ángulo α un valor que reduzca á cero el segundo miembro, de donde resulta

$$\operatorname{tang.} 2\alpha = \frac{2\int\int x'y'\, dx\, dy}{\int\int y'^2\, dx\, dy - \int\int x'^2\, dx\, dy}.$$

A cada valor de tang. 2α, ya sea positivo, ya negativo, co-

rresponden dos ángulos que se diferencian en 180°; por lo tanto, α tendrá dos valores positivos, cuya diferencia es de 90°, y que se hallan comprendidos entre 0 y 180°.

Después de hacer la transformación de coordenadas de que se ha hablado, las tres ecuaciones de equilibrio pueden reemplazarse por las siguientes:

$$c = \frac{P}{\Omega}$$

$$b = \frac{P y_1}{I_x}$$

$$a = \frac{P x_1}{I_y}$$

y la ecuación del plano que expresa la ley de repartición de las presiones se convierte en

$$\rho = P\left(\frac{x_1 x}{I_y} + \frac{y_1 y}{I_x} + \frac{1}{\Omega}\right).$$

Si designamos por r_x, r_y los *radios de giración* de la sección con respecto á los ejes, podremos reemplazar I_y é I_x por los productos Ωr^2_y y Ωr^2_x, y tendremos también

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{x_1 x}{r^2_y} + \frac{y_1 y}{r^2_x} + 1\right).$$

Hemos supuesto que el origen de coordenadas estaba situado en el centro de gravedad de la sección, y que los ejes tenían cierta orientación; si admitimos además que la fuerza P pasa también por el mismo centro de gravedad, entonces las coordenadas x_1, y_1 se reducen á cero, y el valor de ρ se convierte en $\frac{P}{\Omega}$, es decir, que es igual á la presión media.

8. La expresión anterior de ρ, que determina la presión unitaria en un punto cualquiera de la sección, es general; es decir, que podrá dar valores positivos para ciertos puntos de la sección y negativos para otros; esto equivaldría á admitir que el cuerpo puede hallarse sometido á esfuerzos de compresión y de tensión, resultado inadmisible tratándose de un macizo de mampostería que no debe resistir más que á compresiones; por lo tanto, siempre que al aplicar la fórmula á un cuerpo de esta naturaleza se obtengan valores negativos para algunos puntos de la sección, será indispensable modificar la hipótesis que ha servido de base á los cálculos.

Entonces la fuerza P no puede repartirse en toda la extensión de la figura, y se admite que existe una región, para la cual ρ está dado por las ordenadas positivas de la superficie plana

$$\rho = ax + by + c,$$

mientras que en el resto de la sección se verifica siempre $\rho = 0$. La línea que separa estas dos regiones tiene por ecuación

$$ax + by + c = 0,$$

y es la traza del plano sobre la sección.

Se comprende que en este caso debe ser difícil determinar las constantes a, b, c, pues al valerse para ello de las tres ecuaciones generales de equilibrio, será preciso que las integraciones no se extiendan más que á la primera región limitada por la expresada recta, cuya posición es desconocida; es decir, que las constantes entran en los límites de la integración. La solución del problema no puede conseguirse sino por un método de tanteo.

Obsérvase, además, que el medio indicado para obtener en los dos casos el valor de la presión unitaria, estriba sobre hipótesis que pueden separarse más ó menos de lo que en realidad puede tener lugar, bajo el punto de vista físico; pero la concor-

dancia que se observa entre el resultado de los cálculos y la experiencia, es suficiente para permitir la admisión de estas hipótesis, sin preocuparse con indagar otras más complicadas.

9. La mayor parte de los macizos que hay que estudiar en la práctica de las construcciones ofrecen un plano de simetría; además, las fuerzas que actúan sobre este macizo se hallan distribuídas simétricamente por uno y otro lado de este plano, el cual contiene, por consiguiente, la resultante P de las cargas. La orientación especial que, según hemos dicho, había que dar á los ejes coordenados, queda en este caso muy definida, y se reduce á hacer coincidir uno de ellos, el de las X, por ejemplo, con la traza del plano de simetría sobre la sección; es evidente que los productos elementales $xy\,dx\,dy$ se anulan dos á dos, á causa del doble signo que tienen los valores de y; se verificará, por lo tanto, $\int\int xy\,dx\,dy = 0$. Además, por estar situada la resultante en el plano de simetría, se tiene $y_1 = 0$, y la ecuación general de la repartición de presiones se convierte en

$$\rho = P\left(\frac{x_1 x}{I_y} + \frac{1}{\Omega}\right) \quad [1] \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{x_1 x}{r^2_y} + 1\right) \quad [2]$$

En cada caso particular se obtendrá la expresión numérica de ρ en función de x, poniendo en las ecuaciones anteriores el valor de P, el área de la sección y el momento de inercia de la misma con respecto á un eje normal al de simetría, pasando por el centro de gravedad, ó calculando el radio de giración.

Si esta expresión da valores de ρ negativos para algunos de x, entonces será preciso reducir la sección por medio de una recta, á la cual deberán corresponder presiones nulas y que será perpendicular al eje de simetría. Se procederá siempre por tanteo. Habiendo fijado prudencialmente la posición de esta recta de separación, se calcula el área de la sección reducida y el momento de inercia con respecto al eje normal al de las x que pasa por el centro de gravedad de esta sección reducida; á

este centro debe además trasportarse el origen de coordenadas. Obtendremos un valor de ρ poniendo por x la distancia de la línea de separación al centro de gravedad, ó lo que es lo mismo, al origen de coordenadas. Si el resultado es positivo, esto indicará que hemos reducido demasiado la sección, es decir, que habrá que alejar algo más la recta divisoria del centro de gravedad; si, por el contrario, se obtiene un resultado negativo, la reducción será insuficiente. Se concibe que no hay necesidad de llevar este tanteo demasiado lejos, y que en general bastará cierta aproximación.

Examinaremos algunos casos particulares relativos á secciones que presentan un eje de simetría.

RECTÁNGULO.

10. Designemos por a y b las dos dimensiones AB y BD de un rectángulo ABCD (fig. 6.ª); su momento de inercia con respecto á la recta EF que lo divide en dos partes iguales, y tomamos por eje de las Y, es evidentemente igual al momento de inercia de la mitad superior, más el de la mitad inferior. Tendremos, pues,

$$I = 2\int_0^{\frac{b}{2}} ax^2dx = 2\,\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3}\,a = \frac{ab^3}{12}.$$

Sustituyendo este valor de I en la fórmula

$$\rho = P\left(\frac{x_1 x}{I_y} + \frac{1}{\Omega}\right)$$

y haciendo al mismo tiempo $\Omega = ab$, resulta

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{12\,x_1 x}{b^2} + 1\right)$$

para la presión unitaria en un punto definido por su abscisa x.

Lo que principalmente interesa en la práctica, es conocer el

mayor valor que toma la presión unitaria, á fin de cerciorarse de que el material no se halla expuesto en demasía al aplastamiento. Este máximum tendrá lugar en uno de los lados a del rectángulo. Haciendo en la fórmula que antecede $x = \pm \frac{b}{2}$, se obtiene

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 \pm \frac{6x_1}{b}\right)$$

para la presión unitaria en uno de estos lados. Será un máximo para el lado a más próximo á la fuerza P, y un mínimo para el opuesto; es decir, que el máximo se verifica cuando $\frac{b}{2}$ y x_1 tienen el mismo signo, y el mínimo cuando los signos son contrarios.

Resulta, pues,

para el máximo $$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{6x_1}{b}\right)$$

para el mínimo $$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 - \frac{6x_1}{b}\right).$$

Estas expresiones no pueden aplicarse á un macizo de mampostería, sino en el caso en que la segunda da para ρ un valor positivo, lo que exige que se verifique

$$\frac{6x_1}{b} < 1 \qquad \text{ó} \qquad x_1 < \frac{b}{6}$$

Esto indica que el punto de aplicación del peso P no puede hallarse situado á una distancia del centro mayor que $\frac{b}{6}$, lo que equivale á decir que entre este punto de aplicación y el lado a más próximo, debe mediar una longitud que por lo menos sea igual á la tercera parte del lado b del rectángulo.

Haciendo $x_1 = \frac{b}{6}$ en las dos expresiones de ρ correspondientes al máximo y al mínimo, resulta

$$\text{para el máximo} \qquad \rho = \frac{2P}{\Omega}$$

$$\text{para el mínimo} \qquad \rho = 0,$$

cuyos resultados demuestran que cuando el punto de aplicación de P se halla situado al tercio de la longitud del rectángulo, la mayor presión es doble de la presión media y la menor es igual á cero.

Llamemos d la distancia de este mismo punto de aplicación al lado a más próximo, de manera que se tendrá $x_1 = \frac{b}{2} - d$; sustituyendo este valor de x_1 en las dos expresiones generales del máximo y del mínimo, resulta

$$\text{para el máximo} \qquad \rho = \frac{2P}{\Omega}\left(2 - \frac{3d}{b}\right)$$

$$\text{para el mínimo} \qquad \rho = \frac{2P}{\Omega}\left(\frac{3d}{b} - 1\right).$$

11. Para poder aplicar estas fórmulas á un macizo de mampostería, es necesario que den valores positivos de ρ para todos los puntos del rectángulo. Como la longitud d se halla comprendida entre 0 y $\frac{b}{2}$, la primera fórmula nunca dará valores negativos; pero no sucede lo mismo con la segunda si $\frac{3d}{b} < 1$, ó si d es menor que el tercio de la longitud b del rectángulo.

Es preciso entonces desechar estas fórmulas, y según lo que se dijo, deberá reducirse la sección por medio de una recta perpendicular al lado mayor del rectángulo. Pero tratándose de

esta figura, puede hacerse la reducción sin tanteo; no hay más que tomar para la base reducida una longitud igual á $3d$. Es evidente que P se hallará al tercio de la nueva base, y que la presión unitaria en la extremidad determinada por la línea de separación será nula, que es lo que nos proponíamos conseguir.

Se admite en este caso que la carga P actúa únicamente sobre una extensión de base igual á $3d$, y que el resto de la sección no recibe presión alguna. Encontrándose la carga con semejante hipótesis al tercio de la base reducida, cuya superficie designaremos por Ω', la presión unitaria máxima será doble de la presión media, y tendremos

$$\rho = \frac{2P}{\Omega'} \qquad \text{ó} \qquad \rho = \frac{2P}{3da} \qquad [a].$$

Hemos hallado para el máximo

$$\rho = \frac{2P}{\Omega}\left(2 - \frac{3d}{b}\right) \qquad \text{ó} \qquad \rho = \frac{2P}{ab}\left(2 - \frac{3d}{b}\right) \qquad [b]$$

que es aplicable cuando $d > \frac{b}{3}$. Las dos fórmulas [a] y [b] permiten obtener la máxima presión unitaria en todos los casos.

Los macizos que se emplean en las construcciones como, por ejemplo, los muros de sostenimiento ó los estribos de los puentes, ofrecen cierta extensión longitudinal de sección constante; las fuerzas que en ellos actúan son al mismo tiempo proporcionales á esta extensión é igualmente distribuídas. Para el estudio del equilibrio podremos entonces limitarnos á considerar una longitud de muro igual á la unidad. Haciendo $a = 1$ y tomando para P el valor que corresponde á una longitud de un metro, se obtienen las siguientes

FÓRMULAS DE LA LEY DEL TRAPECIO APLICABLES Á UNA SECCIÓN RECTANGULAR.

$$\rho = \frac{2P}{b}\left(2 - \frac{3d}{b}\right) \qquad [3] \qquad \text{para } d > \frac{1}{3}b$$

$$\rho = \frac{2P}{3d} \qquad [4] \qquad \text{para } d < \frac{1}{3}b.$$

Tendremos ocasión de emplear con frecuencia estas fórmulas.

12. Pueden conseguirse también las mismas expresiones valiéndose de las consideraciones gráficas que han servido para definir la ley de repartición de las presiones.

En efecto; siendo A'B' (fig. 7.ª) la posición que ha tomado la base AB del cuerpo superior después de su movimiento de compresión sobre el inferior que sirve de apoyo, las presiones unitarias en los diferentes puntos de la sección, serán respectivamente proporcionales á las longitudes de las verticales comprendidas entre las dos posiciones de la base, de modo que la presión elemental ejercida sobre el elemento infinitamente pequeño L_1L, por ejemplo, puede representarse por otro elemento superficial de base L_1L y de altura LL'.

La suma de las presiones, que debe ser igual á P, estará dada por el área del trapecio ABB'A', y si designamos por m y por n las longitudes AA' y BB', por b la distancia AB, podremos establecer la primera de las ecuaciones de equilibrio haciendo

$$P = \frac{m + n}{2} \times b.$$

Las dos ecuaciones de los momentos se reducen á una sola, en razón de la simetría, y bastará expresar que la fuerza P pasa por el centro de gravedad del trapecio. Tomemos los momentos con respecto á uno de los lados (AA') de los dos triángulos en

que se descompone la figura, y llamando d la distancia de la fuerza á este lado, resultará

$$\mathrm{P}d = \frac{bm}{2} \times \frac{b}{3} + \frac{bn}{2} \times \frac{2}{3}\, b = \frac{1}{6}\, mb^2 + \frac{1}{3}\, nb^2.$$

Combinando esta ecuación con la anterior, se obtiene

$$m = \frac{2\mathrm{P}}{b}\left(2 - \frac{3d}{b}\right)$$

$$n = \frac{2\mathrm{P}}{b}\left(\frac{3d}{b} - 1\right)$$

que son las dos expresiones de la máxima y de la mínima presión unitaria halladas antes.

Si en ellas hacemos $d = \frac{b}{3}$, el máximo se convierte en $\frac{2\mathrm{P}}{b}$ y el mínimo se reduce á cero; el trapecio se transforma en un triángulo (fig. 8.[a])

En el caso de $d < \frac{b}{3}$, el trapecio se convierte en dos triángulos, uno AA'C, que es relativo á la compresión, y otro CB'B, que indica la extensión. Como este último resultado es inadmisible para la mampostería, se supone que la acción de la fuerza P se ejerce únicamente sobre una extensión de base igual á $3d$, lo que da para la presión máxima el valor $\frac{2\mathrm{P}}{3d}$.

ROMBO.

13. Sea ABCD (fig. 9.[a]) una sección romboidal definida por sus diagonales $\mathrm{AB} = 2b$ y $\mathrm{CD} = 2a$. Para hallar el momento de inercia respecto al eje AB, tomemos un elemento superficial infinitamente estrecho y de una longitud $\mathrm{EF} = y$.

Sea x la distancia de este elemento al centro, el momento de inercia tendrá por expresión

$$I = 2\int_0^a y dx \times x^2;$$

pero

$$\frac{y}{2b} = \frac{a - x}{a} \qquad \text{ó} \qquad y = 2b - \frac{2bx}{a},$$

sustituyendo resulta

$$I = 2\int_0^a \left(2bx^2 - \frac{2b}{a}\, x^3\right) dx = \frac{ba^3}{3}.$$

Admitimos que el cuerpo, cuya base es ABCD, se halla sometido á fuerzas simétricas con respecto al plano perpendicular a dicha base y que pasa por CD. Si ponemos el anterior valor de I en la expresión $\rho = P\left(\frac{x_1 x}{I} + \frac{1}{\Omega}\right)$, teniendo además en cuenta que $\Omega = 2ab$, se obtiene

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{6x_1 x}{a^2} + 1\right)$$

para la expresión de la ley de repartición de las presiones aplicable á una sección romboidal.

La máxima presión y la mínima tendrán lugar en las extremidades de la diagonal CD; haciendo, pues, $x = \pm a$, la expresión de ρ se reduce á

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 \pm \frac{6x_1}{a}\right); \qquad [5]$$

el signo $+$ corresponde al máximo y el signo $-$ al mínimo.

El mayor valor que puede darse á x_1, para que el resultado nunca sea negativo, se obtiene haciendo

$$1 - \frac{6x_1}{a} = 0 \qquad \text{ó} \qquad x_1 = \frac{a}{6};$$

es decir, que el punto de aplicación de la carga P debe hallarse á una distancia del centro igual á lo más al sexto de la semi-diagonal, ó bien á una distancia de la extremidad, que por lo menos sea las $\frac{5}{12}$ de la diagonal entera. La distancia mínima análoga encontrada para el rectángulo, compone las $\frac{4}{12}$ de la longitud de la base.

CÍRCULO Y ELIPSE.

14. Designando por $d\omega$ un elemento superficial del círculo, tendremos para el momento de inercia referido á un diámetro cualquiera

$$\mathrm{I} = \int\int x^2 d\omega = \int\int y^2 d\omega,$$

extendiendo la integración á toda la superficie. Podemos, pues, establecer

$$\int\int x^2 d\omega + \int\int y^2 d\omega = 2\mathrm{I} = \int\int (x^2 + y^2)\, d\omega.$$

Reemplacemos el elemento $d\omega$ por su valor $rdrd\theta$, en coordenadas polares, y hagamos $x^2 + y^2 = r^2$, se obtiene

$$2\mathrm{I} = \int_0^r \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta = 2\pi \int_0^r r^3 dr = \frac{\pi r^4}{2}$$

de donde se deduce

$$\mathrm{I} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\Omega r^2}{4}.$$

Si se quiere hallar el momento de inercia de una elipse ADBC (fig. 10), con respecto al diámetro CD, con un radio OA trazaremos un círculo AFBE, y podrá suponerse que las dos figuras se componen de elementos superficiales de forma rectangular é infinitamente estrechos, teniendo sus longitudes TS y MN, proporcionales á los dos diámetros de la elipse, que llamaremos 2R y $2r$. Sea I' el momento de inercia de la elipse é I el del círculo, puesto que el momento de cada rectángulo elemental es proporcional á su longitud paralela al eje, se tiene

$$\frac{I'}{I} = \frac{R}{r} \qquad ó \qquad I' = I\frac{R}{r}$$

reemplazando I por su valor $\frac{\pi r^4}{4}$, y sabiendo que en la elipse $\Omega = \pi R r$, resulta

$$I' = \frac{\pi r^3 R}{4} = \frac{\Omega r^2}{4}.$$

Se obtiene, pues, para la elipse, así como para el círculo, la misma expresión $\frac{\Omega r^2}{4}$ del momento de inercia; pero teniendo en cuenta que en cada caso Ω representa el área de la figura correspondiente.

Sustituyendo este valor del momento de inercia en la expresión general de la presión unitaria, se halla

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{4x_1 x}{r^2} + 1\right).$$

Las presiones máxima y mínima tendrán lugar en las extremidades del eje ó para $x = \pm r$; sus valores son entonces

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 \pm \frac{4x_1}{r}\right) \qquad [6]$$

lo que da para la máxima distancia de P al centro, $x = \frac{r}{4}$;

es decir, que para que la presión no resulte negativa, la fuerza P deberá hallarse á una distancia de la extremidad del eje igual por lo menos á $\frac{3}{8}$ de su longitud.

15. Si comparamos entre sí las tres secciones, rectangular, romboidal y circular ó elíptica, podremos formar el siguiente estado, en el que se designa por b la longitud del eje sobre el que se halla la fuerza P.

NÚMERO 2

	RECTÁNGULO.	CÍRCULO Ó ELIPSE.	ROMBO.
Expresión general de presión unitaria..	$\rho=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{12x_1x}{b^2}\right)$	$\rho=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{16x_1x}{b^2}\right)$	$\rho=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{24x_1x}{b^2}\right)$
Valor de la máxima presión unitaria. . . .	$\rho=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{6x_1}{b}\right)$	$\rho=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{8x_1}{b}\right)$	$\rho=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{12x_1}{b}\right)$
Mínima distancia d.	$d=\frac{8}{24}\,b$	$d=\frac{9}{24}\,b$	$d=\frac{10}{24}\,b$

TRAPECIO.

16. Los viaductos en curva pueden dar lugar al empleo de pilas cuya sección horizontal es un trapecio.

Conviene, pues, hallar el momento de inercia de una figura de esta forma; tal como ABCD (fig. 11), con respecto á un eje paralelo á las bases y pasando por el centro de gravedad G.

Hay que empezar por fijar la posición de este centro; para esto, designemos por a, a' las longitudes de las bases AB, CD; por b el intervalo que las separa, y por x, x' las distancias del punto G á estas bases, de manera que $b = x + x'$; si dividiendo el trapecio en dos triángulos ABC, CBD, tomamos

sus momentos con respecto á AB, por ejemplo, así como el momento del trapecio, tendremos

$$\frac{ab}{2} \times \frac{b}{3} + \frac{a'b}{2} \times \frac{2}{3} b = \frac{a + a'}{2} b \times x,$$

de donde se deduce

$$x = \frac{b}{3} \times \frac{a + 2a'}{a + a'} ;$$

cambiando a por a′ y recíprocamente, se obtiene

$$x' = \frac{b}{3} \times \frac{a' + 2a}{a + a'} .$$

La suma de los valores de x y de x' da la distancia b.

Habiendo fijado la posición del punto G, se hallará el momento de inercia del trapecio ABCD, determinando separadamente los momentos de inercia de los trapecios parciales ABMN y CDMN y sumándolos después. El primero de estos momentos se compone del relativo al rectángulo AEFB, disminuído de los que corresponden á los triángulos AEM y BFN. El segundo se obtiene sumando al momento del rectángulo CDLK los de los triángulos CMK y DLN. Es, pues, preciso conocer el momento de inercia de un triángulo con respecto á uno de sus lados.

17. Sea ABC este triángulo (fig. 12); llamemos l su base AB, h su altura, y consideremos un elemento superficial EF infinitamente estrecho, cuya distancia á AB designaremos por x. El momento de inercia de este elemento tiene por expresión

$$\frac{l(h - x)}{h} x^2 dx;$$

por lo tanto, el momento de inercia del triángulo será

$$I = \frac{l}{h} \int_0^h (hx^2 - x^3)\, dx = \frac{lh^3}{12} .$$

Si hacemos AB — MN $= m$ y CD — MN $= m'$ (esta última diferencia es negativa) (fig. 11), resulta para el momento de inercia del trapecio ABMN

$$\frac{ax^3}{3} - \frac{mx^3}{12}$$

y para el momento de inercia de CDNM

$$\frac{a'x'^3}{3} - \frac{m'x'^3}{12}.$$

Por consiguiente, el momento de inercia del trapecio total ABCD tendrá por valor

$$I = \frac{ax^3 + a'x'^3}{3} - \frac{mx^3 + m'x'^3}{12}.$$

Esta expresión de I deberá ponerse en la fórmula [1] (**9**) para tener la presión unitaria.

Conociendo los valores de x y de x', obtendremos fácilmente los de m y m'. El primero de estos últimos se deduce de la relación

$$\frac{m}{a - a'} = \frac{x}{b},$$

de donde

$$m = \frac{a - a'}{b} x = \frac{a - a'}{a + a'} \times \frac{a + 2a'}{3};$$

del mismo modo se tiene

$$m' = \frac{a' - a}{b} x' = \frac{a' - a}{a + a'} \times \frac{a' + 2a}{3}.$$

La suma de los valores absolutos de m y m' es igual á la diferencia $a - a'$.

SECCIÓN ANULAR.

18. El momento de inercia de un anillo es evidentemente igual á la diferencia entre los momentos de inercia de los círculos exterior é interior. Sean r y r' los radios de estos círculos, tendremos

$$I = \frac{\pi\,(r^4 - r'^4)}{4}.$$

Si sustituímos este valor de I en la expresión

$$\rho = P\left(\frac{x_1 x}{I} + \frac{1}{\Omega}\right),$$

se obtiene

$$\rho = P\left[\frac{4x_1 x}{\pi(r^4 - r'^4)} + \frac{1}{\Omega}\right]$$

y como $\Omega = \pi(r^2 - r'^2)$, resulta

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4x_1 x}{r^2 + r'^2}\right).$$

Haciendo en esta expresión $x = \pm r$, se obtienen las presiones máxima y mínima

$$= \frac{P}{\Omega}\left(1 \pm \frac{4x_1 r}{r^2 + r'^2}\right) \qquad [7].$$

Para que la presión se anule en el extremo de un diámetro, es preciso que se verifique

$$x_1 = \frac{r^2 + r'^2}{4r},$$

lo que da para la mínima distancia de la fuerza P á este extremo,

$$d = r - \frac{r^2 + r'^2}{4r} = \frac{3}{4}r - \frac{1}{4}\frac{r'^2}{r} = \frac{3}{8}b - \frac{1}{8}\frac{b'^2}{b},$$

designando por b y b' los diámetros. Este valor de d tiende hácia el límite $\frac{1}{2}r = \frac{1}{4}b$, á medida que la relación $\frac{b'}{b}$ se acerca á la unidad; es decir, á medida que la masa de la sección se concentra hacia la circunferencia exterior.

19. Hemos hallado para la presión máxima del círculo (**14**)

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4x_1}{r}\right) = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 4x_1 \times \frac{1}{r}\right)$$

y para la del anillo (**18**)

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4x_1 r}{r^2 + r'^2}\right) = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 4x_1 \times \frac{1}{r + \frac{r'^2}{r}}\right).$$

El examen de estas dos expresiones da lugar á las siguientes observaciones:

Si consideramos dos torres cilíndricas de mampostería de igual altura y cuya sección horizontal tenga la misma área, pero siendo una de las torres maciza y la otra hueca, actuando además en ellas unas mismas fuerzas exteriores, resulta que la segunda construcción sufrirá menor presión unitaria que la primera. En efecto; la distancia x_1 es igual en ambos casos, puesto que su valor no depende más que del peso del macizo y de la fuerza exterior, que no varían; además, el radio exterior r debe forzosamente ser mayor en la torre hueca que en la torre maciza.

Si, como sucede en esta clase de construcciones, el empuje ó la fuerza exterior procede de la acción del viento, su efecto aumentará con la sección meridiana, es decir, con el radio ex-

terior, y hará crecer en la misma proporción la distancia x_1, pero se ve que de todas maneras y por causa del término $\frac{r'^2}{r}$ del denominador, la segunda expresión de ρ da un valor más pequeño que la primera; la disminución será tanto más importante, cuanto mayor sea este término, el cual crece á medida que aumentan los radios, ó que se concentra la masa hacia el exterior.

Estas alteraciones no modifican el coeficiente de estabilidad de giro, puesto que el aumento del radio hace crecer en igual proporción, por un lado la sección meridiana y como consecuencia el empuje, por otro el brazo de palanca de la resistencia. Pero estas mismas alteraciones disminuyen la resistencia de resbalamiento, en atención á que el peso de la torre no aumenta á la par que el empuje. Observaremos, sin embargo, que en las torres elevadas, el deslizamiento se encuentra tan contrarrestado, que en general no hay que preocuparse de él.

Puede, pues, decirse que, á igualdad de volumen y de altura, la torre hueca se halla en mejores condiciones de resistencia que la torre maciza.

SECCIÓN COMPUESTA DE RECTÁNGULOS.

20. Los muros de sostenimiento con contrafuertes pueden motivar el estudio de una sección compuesta de rectángulos. La principal dificultad consiste en determinar el momento de inercia.

Consideremos (fig. 13) una sección que no sea simétrica, con respecto al eje de inercia MN que debe pasar por el centro de gravedad de la figura. Hay que empezar por determinar la posición de este centro, para lo cual se calcularán los momentos de los rectángulos ABCD, JKST y EFLI, referidos al lado AB, por ejemplo, y dividiendo la suma de estos momentos por el área total, se tendrá la distancia AM. Podrán entonces acotarse las distancias del eje MN á las horizontales CD, EF y LI, y admitiendo que la figura se compone de

una serie de rectángulos que tienen todos un lado en coincidencia con MN, siendo algunos de estos rectángulos positivos y otros negativos, se calcularán sus momentos de inercia, y sumándolos algebráicamente, obtendremos el momento de inercia de la sección.

Así, en la figura que precede se añadirán los momentos de inercia de los dos rectángulos ABMN y LIOP, y de la suma se restarán los momentos de los cuatro rectángulos CJMQ, KDRN, OQSE, RPTF.

El momento de inercia de un rectángulo cuyas dimensiones son a y b, referido á uno de los lados a, tiene por valor

$$I = \int_0^b a x^2 \, dx = \frac{ab^3}{3}.$$

Se obtendrá fácilmente la solución en cada caso particular.

Hallado el valor de I, hay que ponerlo en la expresión

$$\rho = P\left(\frac{x_1 x}{I} + \frac{1}{\Omega}\right),$$

y se tiene la presión unitaria. Si para algunos puntos los resultados son negativos, será forzoso reducir la sección según se ha explicado.

RECTÁNGULO TERMINADO POR DOS SEMI-CÍRCULOS.

21. Esta sección es la que presenta una pila con sus tajamares. Para hallar el momento de inercia, expondremos antes el siguiente teorema:

Teorema.—*El momento de inercia de una sección con respecto á una recta* AB *que no pasa por su centro de gravedad* (figura 14), *se obtiene añadiendo al momento referido á una recta* CD *paralela á* AB *que pasa por este centro, el producto del área de la sección por el cuadrado de la distancia que separa las dos rectas.*

Sea ABCD una figura cuyo momento de inercia, con res-

pecto á AB, queremos hallar. Este se compone de la suma de los momentos de todos los elementos de la superficie; uno de estos momentos elementales, el que corresponde al elemento M, por ejemplo, tiene por valor

$$dx\, dy \times \overline{ML}^2 = dx\, dy\, (\overline{MK}^2 + 2MK \times KL + \overline{KL}^2\,).$$

Para encontrar el momento de inercia de toda la superficie, hay que hacer las tres sumas de los productos

$$dx\, dy\, \overline{MK}^2\,,\quad dx\, dy\, 2MK \times KL,\quad dx\, dy\, \overline{KL}^2$$

y luego añadirlas. Pero la primera suma, extendida á toda la sección, representa el momento de inercia con respecto á la recta CD que pasa por el centro de gravedad O y que es paralela á AB: la tercera suma, en la que cada elemento superficial se halla multiplicado por el cuadrado de la cantidad constante KL, es evidentemente igual al producto del área total por este cuadrado; por último, la segunda suma es nula, pues dejando aparte el factor constante 2KL, se trata de añadir los productos elementales $dx\, dy \times MK$, que constituyen los momentos de cada elemento superficial referidos á la recta CD, que pasa por el centro de gravedad, y cuya suma es nula. El teorema queda, pues, demostrado.

22. Podemos ya tratar de hallar el momento de inercia de un rectángulo terminado por dos semi-círculos (fig. 15).

Según hemos visto (**14**), el momento de inercia de un círculo con respecto á un diámetro, tiene por valor $\frac{\pi r^4}{4}$; por lo tanto, el momento de inercia del semi-círculo será

$$\frac{\pi r^4}{8}.$$

Para referir este momento á la recta MN que pasa por el centro de gravedad G, aplicaremos el teorema que antecede, y

llamando g la distancia de G á la recta AB, é I_g el nuevo momento, resulta

$$\frac{\pi r^4}{8} = I_g + \frac{\pi r^2}{2} \times g^2$$

y

$$I_g = \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{r^2}{4} - g^2\right).$$

La distancia g se deduce de la que corresponde á un sector cualquiera, y es $\frac{2}{3} r \frac{c}{a}$ (**328**); haciendo en esta expresión $c = 2r$ y $a = \pi r$, resulta para el semi-círculo

$$g = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi};$$

por lo tanto,

$$I_g = \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{16}{9} \frac{r^2}{\pi^2}\right).$$

Si queremos referir este momento al eje CD de la pila, designando por I_e el nuevo valor, tendremos según el mismo teorema

$$I_e = \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{16}{9} \frac{r^2}{\pi^2}\right) + \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{4}{3} \frac{r}{\pi} + b\right)^2$$

$$= \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{r^2}{4} + b^2 + \frac{8rb}{3\pi}\right).$$

Por último, tomando el dúplo del valor anterior y agregándole el momento de inercia del rectángulo ABB'A', que tiene

por expresión $\frac{2r \times 8b^3}{12} = \frac{4}{3} rb^3$, se halla para el momento de inercia de la sección de la pila,

$$I = \pi r^2 \left(\frac{r^2}{4} + b^2\right) + 4rb\left(\frac{2}{3} r^2 + \frac{1}{3} b^2\right).$$

Llamando Ω el área de los dos semi-círculos, es decir, el área del círculo entero y Ω' el área del rectángulo ABB'A', se obtiene por fin

$$I = \Omega\left(\frac{r^2}{4} + b^2\right) + \Omega'\left(\frac{2}{3} r^2 + \frac{1}{3} b^2\right).$$

Se hallará la presión unitaria poniendo en la fórmula [1] el anterior valor de I.

23. Terminaremos lo relativo á la compresión, exponiendo los resultados obtenidos por algunos constructores, sobre los esfuerzos que pueden producir el aplastamiento de diferentes materiales. Estos resultados se indican en el siguiente estado, que hemos tomado también del formulario de M. Claudel:

NÚMERO 3

CUADRO DE LAS CARGAS *por centímetro cuadrado de sección, y que después de un tiempo muy corto, aplastan diferentes cuerpos. Los resultados, acompañados de un asterisco, se han obtenido empleando cubos de* $0^m,01$ *á* $0^m,02$ *de lado, y los demás con cubos de* $0^m,03$ *á* $0^m,05$.

DESIGNACIÓN DE LOS CUERPOS	Densidad.	Carga.
PIEDRAS VOLCÁNICAS, GRANÍTICAS, SILÍCEAS Y ARCILLOSAS.		*Kilogrs.*
Basalto de Suecia y de Auvernia	2,95	2.000
Lava dura del Vesubio	2,60	590
Lava blanda de Nápoles	1,97	230
Pórfido	2,87	2.470
Granito verde de los Vosgos	2,85	620

DESIGNACIÓN DE LOS PRODUCTOS	Densidad.	Carga.
		Kilogrs.
Granito gris de Bretaña	2,74	650
Granito de Normandia *(Gatmas)*	2,66	700
Id. id. *(Flamanville)*	2,71 *	707 *
Granito gris de los Vosgos	2,64	420
Arenisca blanca muy dura	2,50	870
Arenisca blanda	2,49	4
Arenisca de Fontainebleau	2,57 *	895 *
Piedra puerco ó hedionda (arcillosa)	2,66	680
Piedra gris de Florencia (arcillosa de grano fino)	2,56	420
PIEDRAS CALIZAS.		
Mármol negro de Flandes	2,72	790
Mármol blanco veteado, estatuario	2,69	310
Piedra negra de *Saint Fortunat*, muy dura y concóidea	2,65	630
Piedra de *Chatillón*, cerca de París, dura y poco concóidea	2,29	170
Piedra de *Butte aux Cailles*	2,40 *	325 *
Lías de *Bagneux*, cerca de París, muy dura y de grano fino	2,44	440
Piedra blanda de *Bagneux*	2,08	130
Piedra de *Arcueil*, cerca de París	2,30	250
Piedra de *Saint Nom*, cerca de *Versailles*	2,39 *	263 *
Piedra de *Saillancourt*, cerca de *Pontoise* 1.ª clase	2,41	140
Id. 2.ª »	2,29	120
Id. 3.ª »	2,10	90
Piedra dura de *Conflans*, empleada en París	2,07	90
Piedra blanda *(lambourde* y *Vergelet)*, íd.; resiste al agua	1,82	60
Piedra blanda de *Carrieres sous bois*, cerca de *St. Germain*	1,79 *	58 *
Piedra *(lambourde)* de clase inferior, resiste mal al agua	1,56	20
Caliza dura de *Givry*, cerca de París	2,36	310
Id. blanda íd	2,07	120
Caliza amarilla oolítica de *Jaumont*, cerca de Metz 1.ª clase	2,20	180
Id. 2.ª »	2,01	120
Caliza amarilla de *Amanvilliers*, cerca de Metz 1.ª »	2,00	120
Id. 2.ª »	2,01	100
Piedra de *Chateaux Landòn*	2,63 *	350 *
Roca viva de *Saulny*, cerca de Metz	2,55	300
Roca amarilla de *Rozerieulles*, cerca de Metz	2,40	180
Caliza azul gráfito, de la que procede la cal hidráulica de Metz	2,60	300

DESIGNACIÓN DE LOS CUERPOS	Densidad.	Carga.
LADRILLO.		
		Kilogrs.
Ladrillo duro muy cocido..................	1,56	150
Ladrillo rojo.............................	2,17	60
Ladrillo rojo pálido, probablemente mal cocido....................................	2,09	40
Ladrillo de *Hammersmith*..................	»	70
Id. íd. quemado ó vitrificado.	»	100
Ladrillo inglés ó flamenco, blando	»	18
Ladrillo de Borgoña muy cocido.............	2,20	150
Ladrillo de *Sarcilly* bien cocido............	2,00	125
Ladrillo de *Montereau*, cochura ordinaria	1,78	110
Ladrillo rojo de *París*.....................	1,52	90
Ladrillo refractario de *Borgoña* (M. Michelet).	»	162,23
Id. íd. de *París* íd. .	»	92,54
Ladrillo de *Herblay* id. .	»	38,15
Ladrillo de *Sarcelles* íd. .	»	28,15
YESOS Y MORTEROS.		
Yeso sin tamizar, amasado duro, treinta horas después del empleo....................	1,57	52
El mismo, amasado con lechada de cal......	»	73
Mortero ordinario de cal y arena...........	1,65	35
Mortero con ladrillo en polvo..............	1,46	48
Mortero de arenisca pulverizada............	1,68	29
Mortero con puzolana de Nápoles ó de Roma..	1,46	37
Enlucido antiguo, cerca de Roma...........	1,55	76
Enlucido de cemento, del derribo de la Bastilla	1,49	55
Mortero de cemento de Vassy, con mitad de arena, quince días después de amasar.....	2,11 *	155
Hormigón con mortero de cal hidráulica, de seis meses..............................	1,85	41
SEGÚN LAS EXPERIENCIAS DE VICAT, CON CUBOS DE UN CENTÍMETRO DE LADO.		
Caliza arenisca...........................	»	94
» oolítica (globulosa)..................	»	106
» compacta (litográfica)................	»	285
Ladrillo crudo, ó arcilla secada al aire libre .	»	33
Yeso ordinario, amasado duro..............	»	90
Id. íd. amasado más blando que el anterior...............	»	42
Mortero de cal grasa y arena común, á los catorce años............................	»	19
Mortero con cal hidráulica común...........	»	74
» con cal eminentemente hidráulica...	»	144

DESIGNACIÓN DE LOS CUERPOS	Densidad.	Carga.
SEGÚN EXPERIENCIAS RECIENTES HECHAS EN EL CONSERVATORIO DE ARTES Y OFICIOS.		
1.° — *Piedras calizas.*		*Kilogrs.*
Roca de *Bagneux* en cubos de 0m,06 por 0m,06.	2,777	731
Id. *Laversine* íd.	2,546	572
Id. *Vitry,* íd.	2,453	484
Id. *Moulin,* íd.	2,296	249
Id. *Saint-Nom,* íd.	»	432
Id. *Forges,* íd.	2,245	244
Id. *Marly-la-Villé,* de 0m,082 por 0m,082.	2,065	246
Id. *Vergelet-Ferré,* íd.	1,887	125
Id. *Abbaye-du-Val,* íd.	1,727	64,3
Id. *Banc Royal, de Merry,* íd.	1,722	61,5
Id. *Vergelet* fino, íd.	1,497	41,9
Id. *Lambourde,* íd.	1,696	36,4
Caliza de *Chaumont* (Eure), de 0m,08 por 0m,08.	2,020	424
Venderesse (Aisne), cubos de 0m,10 por 0m,10.	2,50	510 300
Beffroy (Meuse) íd.	2,14	127,5 90
Branvilliers (Meuse)	2,30 1,98 1,98	187,5 69,4 30
OEuville (Meuse)	» 2,46	172,5 127,5
Verdun (Meuse)	2,26	60 45
Creta de *Epernay de Bayard* (húmeda)	1,80	24,37 18,75
Id. de *Haut Faubourg*	1,625	37,5 30
Arenisca abigarrada de los Vosgos.		
(Esta arenisca, de color rosa ó blanco, de grano fino y que se extrae en grandes bloques, es fácil de labrar y de tallar, y es conveniente para las construcciones.)		
Niederwiller, cubos de 0m,08 por 0m,08	2,170	490 430
Wizbourg, íd.	»	442
Bremenil, íd.	»	517 368
Kibolo, íd.	»	449
Arscheviller, íd.	»	430 352 303

DESIGNACIÓN DE LOS CUERPOS	Densidad.	Carga.
		Kilogrs.
Aztzwiller, cubos de $0^m,08$ por $0^m,08$........	»	396
Merwiller, íd.	»	294
Piedras de moler.		
Piedra dura de *Chêne la Reine* (Maine), muy porosa, cubos de $0^m,10$ por $0^m,10$..........	1,517	75 15
Piedra blanda de *Chêne la Reine* (Maine), muy porosa, cubos de $0^m,10$ por $0^m,10$..........	1,175	63,75 30,00
Cubos artificiales de yeso y sílice.		
Yeso calcinado sin piedra, cubos macizos de $0^m,20$ de lado..........................	»	49,50
Yeso calcinado con piedra, cubos macizos de $0^m,20$ de lado..........................	»	64,32
Yeso sin piedra. Cubos de $0^m,20$ de lado adelgazado de manera que la sección résistente disminuya en $\frac{1}{4}$	»	58,38
Id. con piedra. (íd.)	»	66,77

La carga permanente á que conviene someter en la práctica los materiales del cuadro anterior, es generalmente de $\frac{1}{10}$ de la que produce la rotura. Para construcciones ligeras, puede llegarse hasta $\frac{1}{6}$; en cambio en otros casos se reduce á $\frac{1}{15}$ y aun á $\frac{1}{20}$ de la misma.

Aunque existen antiguos macizos de mampostería ordinaria que sufren presiones de 14 kilogramos por centímetro cuadrado, es lo regular en los proyectos no pasar de 9; en general varían entre 5 y 9, según la clase de fábrica y el grado de hidraulicidad del mortero.

Los macizos de hormigón hidráulico empleados en cimientos, se calculan para presiones de 3 á 5 kilogramos por centímetro cuadrado, no debiendo exceder de la primera de estas dos cifras para los que se sumergen en agua y hay que cargar poco tiempo después de ejecutados.

CAPÍTULO II

TEORÍA DE LOS MUROS DE SOSTENIMIENTO

DETERMINACIÓN DE LA INTENSIDAD DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

24. Consideremos un prisma de tierra de sección ABL (figura 16), admitiendo que forma un macizo compacto y que descansa por su cara AL sobre un plano, cuya indicación con el horizonte está medida por el ángulo α. Designemos por β el ángulo BAL y descompóngase el peso P del macizo en dos fuerzas, una perpendicular y la otra paralela al plano AL. La segunda de estas componentes, cuyo valor es P sen. α, tiende á hacer resbalar el macizo sobre el plano; la primera lo apoya sobre el mismo y desarrolla un rozamiento que se opone á la caída del prisma. Si llamamos f el coeficiente de rozamiento de la tierra sobre AL, el movimiento no tendrá lugar mientras se verifique

$$f \text{ P cos. } \alpha > \text{P sen. } \alpha \qquad \text{ó} \qquad f > \text{tang. } \alpha,$$

es decir, en tanto que el ángulo de rozamiento cuya tangente trigonométrica es f, tenga un valor mayor que α.

Si lo contrario sucede, podrá impedirse el movimiento aplicando sobre la cara AB del macizo una fuerza normal Q de

una intensidad conveniente. Descompóngase también esta última fuerza, paralela y perpendicularmente al apoyo AL; obtendremos así una componente Q sen. β, que obra de abajo arriba y se añade á f P cos. α para sostener el macizo; la otra componente Q cos. β aumenta el rozamiento del prisma sobre el apoyo AL de una cantidad f Q cos. β y contribuye igualmente á impedir la caída. Habrá equilibrio si damos á Q un valor que satisfaga la ecuación

$$P \text{ sen. } \alpha = f P \text{ cos. } \alpha + Q \text{ sen. } \beta + f Q \text{ cos. } \beta.$$

Puede suponerse que la cara AB del prisma se halla en contacto con el paramento interior de un muro fijo y completamente resistente; en este caso, la fuerza que hemos llamado Q será precisamente la reacción opuesta por el muro. Pero como el paramento de mampostería presenta asperezas susceptibles de desarrollar un nuevo rozamiento de las tierras sobre la fábrica, rozamiento cuyo coeficiente designaremos por f', resulta que podrá tenerse en cuenta para el equilibrio una nueva fuerza f'Q paralela á AB, y cuyas componentes, en el sentido de AL y perpendicular á esta dirección, son respectivamente f'Q cos. β y f'Q sen. β. La primera componente actúa de abajo arriba y ayuda á sostener el prisma de tierra; la segunda disminuye la presión, y por lo tanto, el rozamiento sobre AL de una cantidad ff'Q sen. β.

Tendremos entonces para la ecuación de equilibrio

$$P \text{ sen. } \alpha = fP \text{cos.} \alpha + Q\text{sen.}\beta + fQ\text{cos.}\beta + f'Q\text{cos.}\beta - ff'Q\text{sen.}\beta,$$

ó reuniendo los términos en P

$$P (\text{sen. } \alpha - f \text{cos. } \alpha) = Q (\text{sen. } \beta + f \text{cos.}\beta + f'\text{cos.}\beta - ff'\text{sen.}\beta).$$

Reemplacemos f y f' por las tangentes trigonométricas de los ángulos que forman con el horizonte los respectivos planos

de deslizamiento, ángulos que designaremos por φ y φ'; despejando Q al mismo tiempo, resulta

$$Q = \frac{P \text{ sen. } \alpha - \dfrac{\text{sen. } \varphi}{\cos. \varphi} \cos. \alpha}{\text{sen.} \beta + \dfrac{\text{sen. } \varphi}{\cos. \varphi} \cos. \beta + \dfrac{\text{sen. } \varphi'}{\cos. \varphi'} \cos. \beta - \dfrac{\text{sen. } \varphi \text{ sen. } \varphi'}{\cos. \varphi \cos. \varphi'} \text{sen.} \beta}$$

multiplicando numerador y denominador por $\cos. \varphi \cos. \varphi'$, se llega á

$$Q = \frac{P (\text{sen. } \alpha \cos. \varphi - \text{sen. } \varphi \cos. \alpha) \cos. \varphi'}{(\text{sen.} \beta \cos. \varphi + \text{sen.} \varphi \cos. \beta) \cos. \varphi' + \text{sen.} \varphi' (\cos. \beta \cos. \varphi - \text{sen.} \beta \text{ sen.} \varphi)}$$

el paréntesis del numerador equivale á sen. $(\alpha - \varphi)$; el primer paréntesis del denominador es el seno de $\beta + \varphi$, y el segundo, el coseno del mismo ángulo; por consiguiente, todo el denominador representa el seno de $\beta + \varphi + \varphi'$, y el valor de Q puede expresarse como sigue:

$$Q = \frac{P \text{ sen. } (\alpha - \varphi) \cos. \varphi'}{\text{sen. } (\beta + \varphi + \varphi')} \qquad [8].$$

Esta expresión da el empuje ejercido por las tierras normalmente al paramento interior del muro que las sostiene.

Componiendo esta fuerza con el rozamiento $f'Q$ sobre el muro, obtendremos una resultante ó empuje oblicuo que tiene por valor

$$\sqrt{Q^2 + f'Q^2} = Q \sqrt{1 + \frac{\text{sen.}^2 \varphi'}{\cos.^2 \varphi'}} = \frac{Q}{\cos. \varphi'}$$

$$= \frac{P \text{ sen.} (\alpha - \varphi)}{\text{sen. } (\beta + \varphi + \varphi')}$$

y cuya dirección forma un ángulo φ' con la perpendicular al paramento del muro.

25. El prisma ABL puede formar parte de un macizo de tierra indefinido, del que tiende á desprenderse para empujar

al muro. Hay que conocer la inclinación del plano de rotura AL para determinar el valor del empuje; con este motivo, haremos observar que si este plano coincidiese con el AM (figura 17), que forma con el horizonte el ángulo φ de rozamiento de las tierras sobre ellas mismas, el prisma BAM, considerado como un macizo compacto, quedaría sostenido por este rozamiento y no daría lugar á ningún empuje; por otra parte, si el plano AL se encuentra muy próximo al paramento AB del muro, el empuje será muy pequeño á causa del escaso volumen de tierras que actúa; se comprende, pues, que entre las dos posiciones AM y AB deberá existir para el plano de rotura una posición intermedia AL, que dé lugar á un empuje de mayor intensidad que otra cualquiera. Esta posición es la que es preciso fijar, puesto que habrá que dar al muro la forma y dimensiones convenientes para que resista á la máxima presión procedente del prisma ABL.

La dirección del plano de rotura depende del perfil que afecte la parte superior del terraplén. En la mayoría de los casos este perfil está constituído por un poligono, y la forma más complicada suele presentarse en las obras de fortificación, según indica el contorno LBCDEF de la fig. 18.

En este ejemplo, si admitimos que el plano de rotura AX corta al lado EF del perfil, se prolongará este lado á derecha é izquierda, y tomando sobre la prolongación un punto K, situado de tal modo que el triángulo KAL sea equivalente al área LBCDE, resulta entonces que el triángulo KAX ofrecerá la misma extensión superficial que la sección ABCDEX del prisma de empuje cuyo peso es proporcional á dicha sección.

Tracemos desde el punto A la recta AR perpendicular á KX, la sección del prisma tendrá por medida $\frac{1}{2} \times AR \times KX$, y designando por δ la densidad de las tierras, el peso de una longitud de prisma igual á la unidad, será

$$P = \frac{\delta}{2} \times AR \times KX.$$

Trátase de hallar el valor del ángulo α que la recta AX forma con el horizonte, y de manera que el empuje resulte máximo.

Sustituyendo el anterior valor de P en la expresión [8], se convierte ésta en

$$Q = \frac{\delta}{2} \times KX \times AR \frac{\text{sen.}(\alpha - \varphi)\cos.\varphi'}{\text{sen.}(\beta + \varphi + \varphi')} .$$

Por el punto A trazaremos dos rectas AM y AO, de modo que el ángulo MAH sea igual á φ, y que el ángulo OAL tenga por valor $\varphi + \varphi'$; resultará entonces ángulo $MAX = \alpha - \varphi$, y ángulo $OAX = \beta + \varphi + \varphi'$. Por X y por K trazaremos otras dos rectas XX' y KK', ambas paralelas á AM; tendremos, ángulo $X'XA$ igual por alterno interno á XAM, ó igual á $\alpha - \varphi$, y ángulo $XAX' = \beta + \varphi + \varphi'$. Estableciendo la proporcionalidad entre los senos de los ángulos y los lados opuestos pertenecientes al triángulo AXX', resulta

$$\frac{AX'}{XX'} = \frac{\text{sen.}(\alpha - \varphi)}{\text{sen.}(\beta + \varphi + \varphi')} ;$$

sustituyendo esta relación en el valor de Q que antecede, se obtiene

$$Q = \frac{\delta}{2} KX \times AR \frac{AX'}{XX'} \cos.\varphi'$$

para la expresión que hay que hacer un máximo.

Para esto, observaremos que las dos rectas OA, OM, que están cortadas por las tres paralelas KK', XX', AM, dan lugar á las relaciones

$$\frac{KX}{K'X'} = \frac{OM}{OA} \quad \text{ó} \quad KX = K'X' \frac{OM}{OA}$$

$$\frac{XX'}{OX'} = \frac{AM}{OA} \quad \text{ó} \quad XX' = OX' \frac{AM}{OA} ;$$

poniendo en la expresión de Q los valores de KX y de XX', se llega á

$$Q = \frac{\delta}{2} AR \frac{OM}{AM} \times \frac{K'X' \times AX'}{OX'} \cos. \varphi'.$$

Esta expresión no contiene más cantidades variables con los distintos valores del ángulo α, que las longitudes que terminan en X'. Hagamos

$$OA = a, \text{ constante}$$
$$OK' = k, \text{ constante}$$
$$OX' = x, \text{ variable}$$

resultará

$$K'X' = x - k$$
$$AX' = a - x$$

y el valor de Q se convierte en

$$Q = \frac{\delta}{2} AR \frac{OM}{AM} \times \frac{(x-k).(a-x)}{x} \cos. \varphi';$$

el mayor valor de Q corresponde, pues, al máximo de

$$\frac{(x-k)(a-x)}{x} = k + a - \left(x + \frac{ak}{x}\right),$$

ó sea al mínimo de la cantidad $x + \frac{ak}{x}$. Hagamos

$$y = x + \frac{ak}{x};$$

igualando á cero la derivada, resulta

$$y' = 1 - \frac{ak}{x^2} = 0,$$

de donde se deduce

$$x = \sqrt{ak}$$

para el valor de x ó de la longitud OX′ que corresponde al empuje máximo de las tierras. Según se ve, esta longitud es media proporcional entre OA y OK′.

26. El anterior resultado permite aplicar un procedimiento gráfico que fija la posición del punto X′. Hágase pasar una circunferencia de círculo de un radio cualquiera por los puntos A y K′; luego, por el punto O, se trazará una tangente OT á esta circunferencia; ya no quedará más que tomar sobre OA una longitud OX′ igual á OT, lo que se consigue con el arco de círculo TX′ descrito desde O como centro. Puede también describirse una semicircunferencia sobre OA como diámetro; en el punto K′ se eleva K′N perpendicular á OA; la longitud ON dará también la media proporcional, ó sea la distancia OX′.

Se concluirá la construcción trazando por el punto X′ que hemos determinado una recta X′X paralela á AM, hasta el encuentro en X del lado EF; pero la construcción no es admisible sino en tanto que este punto X de encuentro cae entre las extremidades E y F del lado mencionado.

Adviértase que, puesto que OX′ es media proporcional entre OA y OK′, se verifica

$$\overline{OX'}^2 = OA \times OK' \qquad \text{ó} \qquad \frac{OX'}{OA} = \frac{OK'}{OX'}.$$

Pero el paralelismo de las rectas KK′ y XX′ da lugar á

$$\frac{OK'}{OX'} = \frac{OK}{OX}$$

resulta, pues,

$$\frac{OX'}{OA} = \frac{OK}{OX},$$

lo que demuestra que la recta KX′ que une los puntos K y X′, es paralela á AX; es decir, que una vez fijada la posición del punto X′, si por A trazamos AX paralela á X′K, obten-

dremos directamente la posición del plano de rotura correspondiente al máximo empuje.

En atención á que las rectas KK', XX' y MA son paralelas, y á que OX' es media proporcional entre OK' y OA, resulta que la longitud OX será también media proporcional entre OK y OM. Podrá, pues, fijarse directamente la posición del punto X sobre la recta OM, aplicando á las longitudes OM y OK las mismas construcciones gráficas que han servido para determinar el punto X'.

27. Hemos hallado (**25**) para el valor del empuje normal al paramento del muro

$$Q = \frac{\delta}{2} \frac{AR \times OM}{AM} \times \frac{(x-k)(a-x)}{x} \cos.\varphi'.$$

Advertiremos que el producto $AR \times OM$ representa el duplo del área del triángulo OAM, y que si trazamos OS perpendicular á AM, podremos reemplazar este producto por el equivalente $AM \times OS$. Como además el ángulo OAS es suplementario del OAM, que tiene por valor $\alpha + \beta + \varphi'$, podremos poner

$$\frac{AR \times OM}{AM} = OS = OA \operatorname{sen.}(\alpha + \beta + \varphi').$$

Sustituyendo en el valor de Q, se halla

$$Q = \frac{\delta}{2} OA \operatorname{sen.}(\alpha + \beta + \varphi') \frac{(x-k)(a-x)}{x} \cos.\varphi'$$

$$= \frac{\delta}{2} \operatorname{sen.}(\alpha + \beta + \varphi') \frac{a(x-k)(a-x)}{x} \cos.\varphi.$$

Reemplazando x por su valor $\sqrt{ak}$, resulta

$$Q = \frac{\delta}{2} \operatorname{sen.}(\alpha + \beta + \varphi')\left(a - \sqrt{ak}\right)^2 \cos.\varphi',$$

pero se tiene

$$a - \sqrt{ak} = AX',$$

y la expresión de Q se convierte en

$$Q = \frac{\delta}{2} \overline{AX'}^2 \text{ sen. } (\alpha + \beta + \varphi') \cos. \varphi'. \qquad [9]$$

Esta nueva expresión del empuje es distinta como forma de la [8] que habíamos hallado. Tendremos ocasión de emplear ambas fórmulas en lo sucesivo.

Conviene advertir que el ángulo $\alpha + \beta + \varphi'$, cuyo seno entra como factor en la expresión [9] del empuje, es igual al ángulo que la recta OA forma con el talud natural de las tierras ó con AM; en efecto, el ángulo OAM se compone de los tres ángulos OAB, BAX y XAM, cuyos valores respectivos son $\varphi + \varphi'$, β y $\alpha - \varphi$, y cuya suma es efectivamente $\alpha + \beta + \varphi'$.

28. Hemos dicho que no podían admitirse las construcciones empleadas para fijar la posición del plano de rotura cuando el punto X caía fuera del lado EF del polígono, de que se había partido prolongándolo. Si cae (fig. 19), á la izquierda de EF en X, por ejemplo, esto indica que hay que rehacer las construcciones partiendo del lado DE. Pero podría suceder también que como resultado de las nuevas construcciones se obtuviera para el plano de rotura una posición tal como AX', que corta hacia la derecha la prolongación de DE. En este caso, la recta AE, que pasa por el punto de encuentro de los dos lados EF, ED del polígono, determina la verdadera posición de dicho plano. En efecto; si suponemos que este plano, pasando siempre por la arista proyectada en A, se mueve y recorre el lado FE, de F hacia E, á cada nueva posición el empuje aumentará, puesto que el máximo corresponde á AX y el empuje relativo á AE será mayor que para otra posición cualquiera situada á la derecha. Se ve de igual modo, suponiendo que el plano recorre el lado DE de D hacia E, que el empuje

será mayor para la posición AE que para las que se encuentran á la izquierda. La recta AE dará, pues, la posición relativa al máximo empuje.

Es fácil hacerse también cargo de esta circunstancia construyendo una curva, cuyas ordenadas sean proporcionales á las intensidades de los empujes correspondientes á distintos valores del ángulo α, valores que se tomarán por abscisas. Se obtendrá con dicha construcción (fig. 20) una línea compuesta de varios arcos IF, FE, ED, DC, que no se unen tangencialmente. El empuje máximo que tiene lugar para $\alpha = Oe$, es decir, para el plano AE de la (fig. 19), se refiere á un mayor valor aritmético, y no á un máximo analítico que fuese dado por la mayor ordenada de las curvas FE y DE, indefinidamente prolongadas fuera de los intervalos *fe* y *ed*, puesto que dichos intervalos son los únicos admisibles.

29. Puede suceder que el punto O de encuentro de la prolongación del lado EF y de la recta AO (fig. 18), se halle muy distante; las construcciones gráficas ofrecerían entonces alguna incomodidad; pero en este caso, así como en otros muchos, se puede acudir al cálculo para determinar, ya sea la longitud AX′, ya la distancia KX. Conociendo el valor de AX′, la expresión de Q [9] dará el empuje máximo; si, por el contrario, hallamos KX, podremos calcular el peso P del prisma AKX, y valiéndonos entonces de la expresión [8], se obtendrá el mismo empuje.

Para hallar por el cálculo el valor de AX′, observaremos que en el triángulo OAL (fig. 18), se conoce el ángulo en A, que es igual á $\varphi + \varphi'$, y también el ángulo en L, que depende de la inclinación del paramento del muro con respecto á la prolongación de EF; el tercer ángulo en O será, pues, igualmente conocido, y atendiendo á que la longitud AL constituye uno de los datos del problema, podremos determinar los valores de OL y OA por medio de las dos relaciones

$$\frac{OL}{AL} = \frac{\text{sen. } OAL}{\text{sen. } AOL} \quad \text{y} \quad \frac{OA}{AL} = \frac{\text{sen. } OLA}{\text{sen. } AOL}.$$

De la misma manera en el triángulo ALM se conoce el ángulo A, igual á $\beta + \alpha - \varphi$; el ángulo L que es suplementario de su adyacente; puede, pues, escribirse

$$\frac{LM}{AL} = \frac{\text{sen. } LAM}{\text{sen. } AML}.$$

La suma $OL + LM$ da la longitud OM; la distancia KL, que es también un dato del problema, permite hallar OK; y por medio de la relación

$$\frac{OK'}{OK} = \frac{OA}{OM}$$

se obtiene OK'. Por último, la media proporcional entre OK' y OA es igual al valor de OX', que se resta de OA y resulta AX'.

Para hallar KX, nos valdremos de la relación

$$\frac{KX}{K'X'} = \frac{OM}{OA},$$

en la que conocemos OM, OA y también K'X', por ser esta última cantidad la diferencia entre OX' y OK'.

Examinaremos algunos casos particulares.

30. Podría suceder que la recta AO trazada por el punto A, formando con el paramento AB del muro un ángulo $\varphi + \varphi'$, resultase paralela al lado EF prolongado (fig. 21); entonces el punto de encuentro O de estas dos rectas se traslada al infinito, y la tangente al arco AK', que parte de dicho punto, es paralela á AO; el punto de tangencia se encuentra en el medio del arco AK', y el punto X' divide en dos partes iguales la cuerda AK'.

31. Puede también ocurrir que la parte superior del terraplén termine con un plano KM paralelo al AM del talud natural de las tierras (fig. 22); el encuentro M de estos dos planos se halla también en el infinito y la recta KK' tra-

zada por K paralelamente á AM, se confunde con KO. Esto indica que la distancia OK′ de la fig. 18 es nula, sucediendo lo mismo con la longitud $OX' = \sqrt{OK' \times OA}$, y como consecuencia, las dos distancias AX′ y OA resultan iguales. Por último, el plano de separación del prisma de máximo empuje, plano que se obtiene trazando por A una paralela á KX′, coincide con el talud natural de las tierras, ó sea con AM (figura 22).

En este caso, el prisma de máximo empuje se reduce á una capa de tierra de igual espesor, cuya longitud, y por lo tanto, cuyo peso, son infinitos. Por otra parte, puesto que el prisma descansa sobre el plano AM, el deslizamiento se halla equilibrado por el rozamiento de las superficies en contacto; de aquí parece resultar, para la intensidad del empuje, cierta indeterminación; pero como vamos á ver, no es ésta más que aparente.

En efecto; hemos dicho que las dos distancias AX′ y AO eran de igual longitud; por lo tanto, la expresión [9] de Q dará

$$Q = \frac{\delta}{2} \overline{AO}^2 \text{ sen. } OAM \cos. \varphi'$$

para el valor del empuje máximo. Este valor representa el límite superior hacia el cual tiende el empuje de un prisma que se desprende del macizo general, á medida que el plano de separación se acerca al talud natural AM de las tierras. Desde luego se ve que si el ángulo de estos dos planos es muy pequeño, la fuerza de deslizamiento será una escasa fracción del peso del prisma; pero como este peso es muy grande, el empuje podrá adquirir el valor que indica la anterior expresión de Q.

32. Volvamos á la fig. 18. Si desde el punto X′ que hemos fijado por construcciones gráficas, trazamos X′J perpendicular á la prolongación del talud natural de las tierras AM, se verifica

$$X'J = AX' \text{ sen. } JAX' = AX' \text{ sen. } X'AM = AX' \text{ sen. } (\alpha + \beta + \varphi')$$

y se podrá escribir la expresión [9] de Q (**27**) como sigue:

$$\frac{Q}{\cos.\, \varphi'} = \frac{\delta}{2}\, AX' \times X'J;$$

lo que indica que la intensidad del empuje oblicuo sobre el paramento del muro es equivalente al peso de un prisma de tierra, cuya sección se compone de un triángulo que tiene por base la longitud AX', y por altura la proyección X'J de esta misma longitud sobre la normal al talud natural de las tierras.

Si por el punto X, en donde termina el plano de rotura, se traza la recta XI paralela á AO, formaremos un triángulo AXI igual al AX'X; pero este último es equivalente al triángulo AKX, puesto que tiene la misma base, y que los vértices opuestos se hallan sobre una paralela á esta base, resulta

$$\text{superf. AXI} = \text{superf. AKX} = \text{superf. ABCDEXA};$$

lo que demuestra que la posición del plano de rotura debe ser tal, que trazando por su extremidad superior una recta paralela á AO, se forme un triángulo AXI, cuya área sea equivalente á la del macizo de tierra que dicho plano separa. Dedúcese también que la recta que une los puntos K, I, queda dividida por AX en dos partes iguales.

33. Esta consecuencia nos permitirá examinar el caso en que el terraplén termina en la parte superior con una curva cualquiera BLX (fig. 23).

Sea X la extremidad superior del plano de rotura; trácese por este punto una tangente OM á la curva y fórmense en A los dos ángulos HAM $= \varphi$ y BAO $= \varphi + \varphi'$. Fijaremos después la posición del punto K de manera que el área del triángulo XKA sea equivalente al área ABLX, y hallaremos una media proporcional entre las longitudes OK y KM; si se ha elegido convenientemente el punto X, la media proporcional deberá resultar igual á la distancia OX. De no verificarse esta

igualdad, sería preciso rehacer las construcciones partiendo de otro punto.

Se comprende que únicamente mediante algunos tanteos, es como se podrá conseguir la verdadera posición del plano de rotura. Sin embargo, se facilitará mucho la operación teniendo presente la consecuencia de que se ha hecho mérito; es decir, observando que si por el punto X se traza una recta XI paralela á AO, se formará un triángulo AXI, cuya área ha de ser equivalente al área de la figura ABLX.

Advertiremos de paso que la construcción gráfica por medio de la cual se determina la longitud $OX = \sqrt{OK \times OM}$, puede efectuarse por bajo del punto A á una escala menor cualquiera, según indica la figura. La recta $O'M'$, trazada á cierta distancia de A paralelamente á OM, queda cortada por las prolongaciones de las cuatro rectas AO, AK, AX y AM, en tres partes $O'K''$, $K''X''$ y $X''M'$, que son respectivamente proporcionales á OK, KX y XM. Por lo tanto, sobre $O'M'$ como diámetro, se describe una semicircunferencia, en K'' se levanta una perpendicular $K''N'$ al diámetro, llévase luego la longitud $K''N'$ sobre $O'X''$ á partir de O', y por último, la línea que une los puntos X'' y A prolongada hasta X, fija la posición del plano de rotura.

Esta construcción es aplicable á todos aquellos casos en que los puntos de encuentro O y M se hallan muy distantes, y no se quiere acudir al cálculo.

34. Los muros que sostienen los terraplenes á que dan lugar las vías de comunicación, presentan á menudo la disposición que indica la figura 24. El muro es menos elevado que la explanación del camino, y entre ésta y la coronación B de la fábrica media cierto trozo CB del talud natural del terraplén.

Después de prolongar CX, se forman en A los ángulos φ con AH y $\varphi + \varphi'$ con AB, y se determina el punto K de modo que los dos triángulos ACK y ACB sean equivalentes; es evidente que para conseguir esto último, no hay más que trazar BK paralelamente á AC. La recta KK' paralela á AI, determina la longitud OK' y la media proporcional entre OK'

y OA da el valor de OX'. Por último, el plano de rotura AX debe ser paralelo á KX'.

Si por el punto X se tira XI paralela á OA, se forma un triángulo AXI que ha de ser equivalente al triángulo AXK, lo que exige, como comprobación, que las dos longitudes KL y y LI sean iguales.

35. Vamos á examinar ahora las simplificaciones que admite la teoría, cuando se prescinde del rozamiento de las tierras sobre el muro.

Igualando á cero el ángulo de este rozamiento, que hemos designado por φ', las fórmulas [8] y [9] se convierten en

$$Q = P \frac{\text{sen.}\ (\alpha - \varphi)}{\text{sen.}\ (\beta + \varphi)} \qquad [10]$$

$$Q = \frac{\delta}{2} \overline{AX'}^2 \ \text{sen.}\ (\alpha + \beta) \qquad [11].$$

Adviértase que el ángulo $\alpha + \beta$ que entra en la última fórmula es el formado por el paramento del muro con la horizontal; su seno puede reemplazarse por el coseno del ángulo que mide la inclinación de este paramento con la vertical que llamaremos θ. Además, el producto AX' sen. $(\alpha + \beta)$ expresa en este caso la proyección JX' de AX' sobre la normal á AM (fig. 18). Se tiene así también

$$Q = \frac{\delta}{2} \overline{AX'}^2 \cos.\ \theta \qquad [12]$$

$$Q = \frac{\delta}{2} AX' \times JX' \qquad [13].$$

Se determinará siempre la longitud AX' mediante las mismas construcciones gráficas de la citada figura 18, con la única diferencia de hacer el ángulo OAB igual á φ, en vez de darle el valor $\varphi + \varphi'$.

36. Si además de admitir $\varphi' = 0$, se supone que el terra-

plén termina con una horizontal pasando por la coronación del muro, se llega entonces á una propiedad muy interesante del plano de rotura. En semejante caso, este plano divide en dos partes iguales el ángulo que el paramento interior del muro forma con el talud natural de las tierras. En efecto; las construcciones que fijan la posición del plano AX (fig. 25), se reducen entonces á trazar por el punto A dos rectas AO y AM, que forman un mismo ángulo φ, con AB por un lado y con AM por otro; luego por el punto B, que en este caso se confunde con K, se traza BK′ paralela á AM; se determina además OX′ por una media proporcional entre OA y OK′, y por último, se traza AX paralela á X′B ó X′X paralela á K′B. A consecuencia de la horizontalidad de OM, el ángulo OMA es igual al MAH, es decir, igual á φ; los dos triángulos OAB y OAM, que tienen común el ángulo en O, son semejantes, puesto que además el ángulo en A del primero es igual al ángulo M del segundo; resulta, por lo tanto,

$$\overline{OA}^2 = OB \times OM;$$

pero tenemos también

$$\overline{OX}^2 = OB \times OM.$$

Se deduce de estas dos ecuaciones OA = OX, es decir, que el triángulo OAX es isósceles y el ángulo OXA igual al ángulo OAX; si de estos dos ángulos iguales restamos la misma cantidad φ, se obtiene

$$\text{áng. } X'XA = \text{áng. } XAB;$$

y como áng. X′XA = áng. XAM, resulta, por último,

$$\text{áng. } XAB = \text{áng. } XAM,$$

que es lo que se quería demostrar.

Esta propiedad simplifica considerablemente la determina-

ción del plano de rotura correspondiente al máximo empuje, pues las construcciones se reducen á trazar la bisetriz del ángulo BAM.

37. Hemos designado por θ el ángulo que el paramento del muro forma con la vertical; el peso del prisma de máximo empuje tiene por valor (fig. 26)

$$P = \frac{\delta}{2}\left[\text{tang. }(\beta - \theta) + \text{tang. }\theta\right] H^2$$

y la expresión [10] se convierte en

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 \left[\text{tang. }(\beta - \theta) + \text{tang. }\theta\right] \frac{\text{sen. }(\alpha - \varphi)}{\text{sen. }(\beta + \varphi)} \qquad [14].$$

Para el caso en que el paramento del muro se halle en desplome (fig. 27), hay que cambiar el signo de θ, y el valor del máximo empuje es entonces

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 \left[\text{tang. }(\beta + \theta) - \text{tang. }\theta\right] \frac{\text{sen. }(\alpha - \varphi)}{\text{sen. }(\beta + \varphi)} \qquad [15].$$

Conviene advertir que en los dos últimos casos examinados, en los que el terraplén termina á nivel con la coronación del muro, el ángulo $\alpha - \varphi$ es igual al ángulo β.

Haciendo $\theta = 0$ en lás dos expresiones de Q [14 y 15], resulta

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 \text{ tang.}^2\, \beta \qquad [16],$$

que es la expresión conocida del empuje de las tierras, en el caso en que además de prescindir del rozamiento sobre el muro, se supone que el terraplén se halla por arriba á nivel con la coronación de la fábrica y que el paramento interior es vertical. Entonces el valor del angulo β es igual á $\frac{90 - \varphi}{2}$.

38. Puede también hacerse $\varphi = 0$, lo que corresponde al caso de un líquido; el ángulo β es entonces de 45° y su tangente tiene por valor la unidad. Tendremos así para el empuje de un líquido sobre el paramento vertical de un muro

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 \qquad [17].$$

Este empuje equivale al peso de un prisma de líquido de sección triangular, cuya base y cuya altura son iguales á H.

También se hallará fácilmente el empuje de un líquido sobre un paramento inclinado, deduciéndolo de la expresión [14]. Llamemos γ el ángulo $\beta - \theta$, es decir, el ángulo RAX (figura 26); si se observa que $\alpha - \varphi$ es complementario de $\gamma + \varphi$, podremos poner dicha expresión bajo la forma

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 (\text{tang. } \gamma + \text{tang. } \theta) \frac{\cos. (\gamma + \varphi)}{\text{sen. } (\gamma + \theta + \varphi)}$$

y haciendo $\varphi = 0$, queda

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 (\text{tang. } \gamma + \text{tang. } \theta) \frac{\cos. \gamma}{\text{sen. } (\gamma + \theta)};$$

si reemplazamos las tangentes por las relaciones del seno al coseno, resulta

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 \left(\frac{\text{sen. } \gamma}{\cos. \gamma} + \frac{\text{sen. } \theta}{\cos. \theta} \right) \frac{\cos. \gamma}{\text{sen. } (\gamma + \theta)}$$

$$= \frac{\delta}{2} H^2 \times \frac{1}{\cos. \theta} (\text{sen.} \gamma \cos. \theta + \text{sen.} \theta \cos. \gamma) \times \frac{1}{\text{sen. } (\gamma + \theta)};$$

por último, simplificando se obtiene

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 \times \frac{1}{\cos. \theta} \qquad [18].$$

Este empuje es normal al paramento del muro, y su intensidad equivale al peso de un prisma de líquido, cuya sección es

un triángulo que tenga por base la longitud $AB = \frac{H}{\cos.\theta}$ del paramento y por altura la del líquido.

Este empuje normal al paramento, puede ser reemplazado por sus dos componentes horizontal y vertical, las cuales se obtienen multiplicando sucesivamente el valor de Q por cos. θ y por sen. θ;

$Q_h = \frac{\delta}{2} H^2$ para la componente horizontal, igual á la presión de un líquido sobre un paramento vertical de altura H, y

$Q_v = \frac{\delta}{2} H^2 \text{ tang. } \theta$, para la componente vertical que representa el peso del prisma de líquido de sección triangular ABR que se halla encima del paramento inclinado.

Hemos determinado la intensidad del empuje máximo de las tierras en la mayoría de los casos que pueden presentarse; conocemos también la dirección de este empuje, pero para poder resolver el problema relativo al equilibrio de los muros de sostenimiento, necesitamos aun fijar el punto en que actúa esta fuerza, á fin de conocer su posición y deducir su efecto sobre el muro. El examen de este punto de aplicación es objeto del siguiente artículo.

REPARTICIÓN DE LAS PRESIONES

39. Examinaremos primero el caso en que el terraplén termina en la parte superior con un plano inclinado que arranca de la arista interior de la coronación del muro.

La construcción que hemos indicado en el artículo anterior, para fijar la posición del plano de rotura AX relativo al máximo empuje (fig. 28) y para una longitud BA del paramento, se reduce á trazar las dos rectas AM y AO, formando los dos ángulos φ y $\varphi + \varphi'$ con AH y AB respectivamente, á trazar BK′ paralela á AM; se determina luego la media proporcional $OX' = \sqrt{OK' \times OA}$, y por último, se traza AX parale-

la á BX'. Si aplicamos ahora la misma construcción á una longitud BA_1 del paramento, tomada á partir de B, pero distinta de BA, obtendremos una serie de líneas homólogas respectivamente paralelas á las que teníamos trazadas con la primera construcción; así es que el punto X'_1, determinado por la media proporcional $OX'_1 = \sqrt{OK'_1 \times OA_1}$, caerá evidentemente sobre la recta BX', lo que indica que el nuevo plano de rotura A_1X_1 es paralelo á AX. Resulta, pues, que la inclinación del plano de rotura correspondiente al empuje máximo no varía para una longitud cualquiera del paramento del muro, tomada á partir de la extremidad superior.

Se deduce de aquí, que para un mismo muro y para una misma disposición del terraplén, análoga á la que estamos examinando, la intensidad del empuje máximo correspondiente á diferentes alturas á partir de la coronación, empuje que está dado por la expresión [8]

$$Q = P \frac{\text{sen.} (\alpha - \varphi) \cos. \varphi'}{\text{sen.} (\beta + \varphi + \varphi')},$$

es proporcional al peso P del prisma triangular de tierra que tiende á desprenderse del macizo general; es decir, que en la figura anterior, los empujes sobre BA_1 y sobre BA son respectivamente proporcionales á las áreas de los triángulos BA_1X_1 y BAX, lo que demuestra que el empuje sobre A_1A es proporcional al área del trapecio A_1AXX_1, que constituye la diferencia de los dos triángulos.

Dividiendo el paramento AB en un número cualquiera de partes, si por los puntos de división trazamos paralelas á AX, obtendremos una serie de trapecios cuyas áreas serán respectivamente proporcionales á los empujes sobre cada una de dichas partes. Siendo éstas en número infinito, se tendrá un conjunto de fuerzas elementales proporcionales á las diversas longitudes de las paralelas, y es evidente que su resultante pasará por el centro de gravedad del triángulo BAX, que representa el empuje total. Por lo tanto, la referida resultante, paralela á AX,

cortará el paramento del muro al tercio de su altura á partir de abajo, ó á los dos tercios, contando desde arriba.

Esta propiedad puede también demostrarse analíticamente. En efecto; hemos visto que los empujes sobre diferentes longitudes del paramento, á partir de la coronación, eran proporcionales á los pesos P, es decir, á las secciones triangulares y semejantes de los prismas de máximo empuje; serán, pues, proporcionales á los cuadrados de los lados homólogos, ó á los cuadrados de las respectivas longitudes de paramento á partir de arriba, longitudes que designaremos por z, y podremos escribir

$$Q = Az^2,$$

siendo A una cantidad constante. El empuje sobre un elemento del muro tiene por valor

$$dQ = 2Azdz;$$

el momento de esta fuerza elemental, con respecto á la coronación, presentará la forma

$$2Az^2dz,$$

y la suma de momentos para toda la longitud del paramento será, llamando l esta longitud,

$$\int_0^l 2Az^2dz = \frac{2}{3} Al^3.$$

Dividiendo esta suma de momentos por el empuje total $Q = Al^2$, resulta para la distancia z_1 del punto de aplicación de la resultante á la extremidad superior del paramento

$$z_1 = \frac{2}{3} l.$$

40. Fuera del caso que acabamos de examinar, la determinación del punto de aplicación del empuje no puede conseguir-

se con la misma facilidad. Supongamos que el terraplén se halla limitado por sólo dos lados; uno BC (fig. 29), que arranca de la coronación, y otro CD, cuya inclinación es distinta.

Para todas las longitudes del paramento que, partiendo del extremo superior B, se hallan comprendidas entre B y cierto punto A_1 que puede fijarse con facilidad, los planos de rotura son todos paralelos á A_1C, y la resultante de presiones sobre BA_1 pasará por el tercio inferior, como en el caso que precede. Pero si tomamos una longitud de paramento BA_2 mayor, el plano de rotura A_2X_2 cortará al lado CD del polígono superior y su dirección no será ya paralela á A_1C, porque para establecerla hay que emplear construcciones distintas, que exigen la determinación previa del punto K, situado de tal modo, que el área BA_2E sea equivalente á la EKC.

Puede adoptarse un procedimiento, que consiste en dividir el paramento del muro en partes suficientemente pequeñas, y determinar el empuje parcial sobre cada una de ellas. Estos empujes constituyen la diferencia que existe entre los que corresponden á cada dos longitudes que, partiendo de la coronación del muro, terminan en las extremidades de la subdivisión considerada. Se obtiene con esto una serie de fuerzas paralelas, de las que se deduce sin dificultad la posición de la resultante.

Para fijar en la práctica el encuentro de la resultante del empuje sobre la longitud BA, por ejemplo, con el paramento del muro, después que se haya determinado la dirección AX del plano de rotura correspondiente á esta longitud, pueden limitarse las operaciones á trazar simplemente por el centro de gravedad de la figura BAXC una recta paralela á AX. El resultado es suficientemente exacto para las aplicaciones.

41. Vamos á examinar el caso en que las tierras que actúan sobre el muro se hallan sometidas á la acción de una sobrecarga. Se supondrá que el terraplén termina con un plano horizontal á nivel de la coronación del muro, y que la sobrecarga está uniformemente distribuída sobre este plano.

Se ve fácilmente que la sobrecarga uniforme no altera la dirección del plano de rotura, y que este plano divide siempre

en dos partes iguales el ángulo formado por el paramento del muro con el talud natural de las tierras. En efecto; si designamos por p el peso de la sobrecarga por metro cuadrado, tendremos para el peso que actúa sobre la base superior BX del prisma de máximo empuje el producto $p \times \mathrm{BX}$; las consideraciones de que nos hemos valido para hallar la expresión [8] del empuje son absolutamente idénticas, y podremos establecer la nueva ecuación de equilibrio, reemplazando el peso P del prisma por este mismo peso aumentado con la sobrecarga. Resultará, haciendo $\varphi' = 0$,

$$Q = (P + p \times BX) \frac{\text{sen.}(\alpha - \varphi)}{\text{sen.}(\beta + \varphi)} = \left(\frac{\delta}{2} H + p\right) BX \frac{\text{sen.}(\alpha - \varphi)}{\text{sen.}(\beta + \varphi)},$$

y habrá que hallar el máximo de la misma cantidad

$$BX \frac{\text{sen.}(\alpha - \varphi)}{\text{sen.}(\beta - \varphi)},$$

variable con el ángulo α. El resultado dará siempre para AX la bisectriz del ángulo BAM.

En el mismo caso de encontrarse el terraplén á nivel con la coronación del muro, hemos obtenido (**37**) las expresiones [14 y 15], que se deducen de la expresión [8], sustituyendo P (figura 20), por su valor

$$\frac{\delta}{2} H \times BX = \frac{\delta}{2} H^2 \left[\text{tang.}(\beta \mp \theta) \pm \text{tang.}\,\theta\right];$$

por lo tanto, llegaremos á fórmulas análogas en el supuesto de existir sobrecarga; no habrá más que reemplazar $\frac{\delta}{2} H$ por $\frac{\delta}{2} H + p$, y se obtiene

$$Q = H\left(\frac{\delta}{2} H + p\right)\left[\text{tang.}(\beta - \theta) + \text{tang.}\,\theta\right] \frac{\text{sen.}(\alpha - \varphi)}{\text{sen.}(\beta + \varphi)} \quad [19].$$

cuando el paramento interior del muro está en talud, y

$$Q = H\left(\frac{\delta}{2}H + p\right)\left[\text{tang.}(\beta + \theta) - \text{tang.}\theta\right]\frac{\text{sen.}(\alpha - \varphi)}{\text{sen.}(\beta + \varphi)} \quad [20],$$

si el mismo paramento ofrece desplome.

Puede suponerse que la sobrecarga se compone de una capa de tierra cuyo espesor es $h = \frac{p}{\delta}$, y entonces las dos expresiones [19] y [20], se convierten en

$$Q = \delta H\left(\frac{H}{2} + h\right)\left[\text{tang.}(\beta - \theta) + \text{tang.}\theta\right]\frac{\text{sen.}(\alpha - \varphi)}{\text{sen.}(\beta + \varphi)} \quad [21]$$

$$Q = \delta H\left(\frac{H}{2} + h\right)\left[\text{tang.}(\beta + \theta) - \text{tang.}\theta\right]\frac{\text{sen.}(\alpha - \varphi)}{\text{sen.}(\beta + \varphi)} \quad [22].$$

En las cuatro fórmulas que anteceden se verifica $\beta = \alpha - \varphi$.

Por último, si el paramento interior del muro es vertical, se tiene

$$Q = H\left(\frac{\delta}{2}H + p\right)\text{tang.}^2\beta \qquad [23]$$

$$Q = \delta H\left(\frac{H}{2} + h\right)\text{tang.}^2\beta \qquad [24].$$

Se ve, por lo que antecede, que para pasar del caso de un terraplén sin sobrecarga, al caso en que sobre la explanación actúa un peso p por metro cuadrado, ó una capa adicional de tierra de un grueso h, no hay más que reemplazar en la expresión del empuje $\frac{\delta}{2}H$ por $\frac{\delta}{2}H + p$, ó bien $\frac{H}{2}$ por $\frac{H}{2} + h$.

42. Vamos á determinar ahora el punto de aplicación de este empuje, teniendo en cuenta la sobrecarga. Para esto, considérense separadamente la acción del prisma de tierra que

tiende á desprenderse del macizo general, y la de la sobrecarga. La primera (fig. 30), da lugar á una resultante que pasa por el punto N, situado al tercio de AB; la segunda, que está distribuída uniformemente, aumenta de una misma cantidad cada uno de los empujes parciales producidos por las diferentes capas paralelas á AX que subdividen al prisma; la resultante de todos estos aumentos iguales, deberá cortar al paramento AB en su punto medio M. Así es que tendremos en N una fuerza proporcional á $P = \frac{\delta}{2} H \times BX$, y en M otra fuerza proporcional á $p \times BX$; se obtiene, pues, el punto de paso de la resultante final, dividiendo el intervalo MN en dos partes inversamente proporcionales á $\frac{\delta}{2}$ H y á p. Dedúcese de aquí

$$NR = NM \frac{p}{\frac{\delta}{2} H + p} = MN \frac{2p}{\delta H + 2p};$$

pero como $NM = MA - NA = \frac{1}{2} H - \frac{1}{3} H = \frac{1}{6} H$, resulta

$$AR = AN + NR = \frac{1}{3} H + \frac{1}{6} H \frac{2p}{\delta H + 2p}$$

$$= \frac{1}{3} H \frac{\delta H + 3p}{\delta H + 2p}.$$

Reemplazando p por su equivalente δh, se tiene también

$$AR = \frac{1}{3} H \frac{H + 3h}{H + 2h};$$

lo que demuestra que actuando sobre el terraplén una sobrecarga, la distancia del punto de aplicación del empuje á la base del muro es igual al tercio de la longitud del paramento multiplicado por la relación $\frac{\delta H + 3p}{\delta H + 2p}$, ó por $\frac{H + 3h}{H + 2h}$, según que

la sobrecarga está dada por un peso unitario p, ó se halla representada por una capa de tierra de un grueso h.

Los resultados que acabamos de obtener permiten aplicar un procedimiento gráfico muy sencillo para hallar la posición del punto R. En efecto; hemos visto que este punto divide el intervalo NM en dos partes inversamente proporcionales á $\frac{\delta}{2}$ H y á p, ó á $\frac{H}{2}$ y á h; por consiguiente, no hay más que levantar en el punto M una perpendicular ML á AB é igual á $\frac{H}{2}$, y en N otra perpendicular NS á la misma recta en sentido contrario é igual á h, ó igual á $\frac{p}{\delta}$. La recta SL cortará al paramento en el punto R.

43. Hemos supuesto siempre, hasta ahora, que el paramento interior del muro que recibe el empuje de las tierras, se compone de un sólo plano. Conviene examinar el caso en que este paramento está formado por varios planos y determinar la resultante de la acción de las tierras sobre el muro.

Volvamos por un momento á considerar este muro con paramento plano, sosteniendo un terraplén cuya superficie superior arranca de la coronación y es igualmente plana. La resultante del empuje de las tierras pasa por el punto del paramento situado al tercio de la altura, á partir de la base, y su dirección forma un ángulo φ' con la normal al paramento, cuando se tiene en cuenta el rozamiento de las tierras sobre la fábrica. La intensidad de este empuje está dada por la expresión [9] que es

$$\frac{Q}{\cos. \varphi'} = \frac{\delta}{2} \overline{AX'}^2 \text{ sen. } (\alpha + \beta + \varphi').$$

Con la disposición que consideramos, la longitud AX′ es proporcional á la altura del muro, para un mismo muro y un mismo terraplén; podemos, por lo tanto, hacer AX′ $= m$H, designando m una constante, y la expresión del empuje será

$$\frac{Q}{\cos. \varphi'} = \frac{\delta}{2} H^2 m^2 \text{ sen. } (\alpha + \beta + \varphi').$$

Considerando como variables $\frac{Q}{\cos. \varphi'}$ y H, la ecuación que precede representa una parábola CE (fig. 31), cuyo vértice se halla en C y que puede construirse por puntos, llevando sobre la vertical CD y á partir de C, diferentes valores de H, y trazando después, por los puntos determinados, horizontales de una longitud proporcional á los valores de $\frac{Q}{\cos. \varphi'}$, que respectivamente correspondan á dichas alturas. La curva obtenida se llama *curva de los empujes*.

Tracemos una nueva vertical LI de una longitud igual á H y hagamos $IU = m^2 H \text{ sen. } (\alpha + \beta + \varphi')$; la intensidad del empuje podrá representarse por el peso de un prisma de tierra, cuya sección es el triángulo LUI, llamado con este motivo *triángulo de los empujes*, y el punto de aplicación de la resultante se obtiene proyectando el centro de gravedad de este triángulo sobre el paramento AB del muro, por medio de una horizontal. Subdividiendo este triángulo en fajas horizontales, cada una de éstas representará el empuje parcial sobre la altura de muro que le corresponde; el punto de aplicación de este empuje parcial se halla también proyectando horizontalmente sobre el paramento AB el centro de gravedad de la faja correspondiente, cuya figura es un trapecio, salvo la primera de arriba, que presenta una sección triangular.

Hemos determinado la longitud IU de la base del triángulo llamado de los empujes y para una altura H, por medio de la expresión $IU = m^2 H \text{ sen. } (\alpha + \beta + \varphi')$, que es susceptible de calcularse. Pero puede también obtenerse gráficamente esta misma base, recordando (**32**) (fig. 18) que la intensidad del empuje equivale al peso de un prisma de tierra, cuya sección es un triángulo que tiene por base la longitud AX', y por altura la proyección de esta longitud sobre la normal al talud natural de las tierras, proyección que designamos por JX'. Si hacemos en la fig. 31 $IN = AX'$ é $IM = JX'$, no habrá más que verificar la transformación del triángulo MIN en otro equivalente LIU, cuya altura LI sea igual á H.

44. Pasemos á considerar ahora un muro, cuyo paramento interior se compone de tres planos AB, BC, CD (fig. 32). Según las reglas que acabamos de exponer, podrá construirse el triángulo de empuje EFI que mide la presión de las tierras sobre AB. De un modo semejante, si suponemos que la parte CB del paramento se prolonga hasta el encuentro B′ con la superficie superior del terraplén, se determinará el triángulo de empuje EJK correspondiente á la longitud B′C, de manera que el área del trapecio FJK*i* representará el empuje sobre BC. Por último, el lado DC, prolongado hasta C′, dará lugar al triángulo ELM, y el trapecio JLMk constituirá la medida del empuje sobre CD.

Tendremos así tres fuerzas F, F′ y F″, cuyos valores están dados por las áreas de las tres partes de que se compone la figura de empujes, es decir, por el triángulo superior y por los dos trapecios que le siguen; los puntos de aplicación de estas tres fuerzas se obtienen proyectando sobre el paramento, por medio de horizontales, los respectivos centros de gravedad de dichas tres áreas; en cuanto á sus direcciones, deberán formar un mismo ángulo φ', con las normales á los lados AB, BC y CD. Por último, la resultante de las tres fuerzas será el empuje de las tierras sobre todo el paramento ABCD del muro.

Este método no es completamente exacto, y exige una corrección de que vamos á tratar. Hay que advertir que el empuje sobre AB procede de un prisma de tierra limitado por su plano de rotura BX_1; así como al empuje sobre el paramento CB prolongado hasta B′, corresponde un plano de rotura CX_2, pero que no es paralelo al anterior. Si por el punto B trazamos la recta BX_1' con igual inclinación que CX_2, el trapecio $CBX_1'X_2$ formará la sección del prisma de tierra cuyo empuje está medido por el trapecio FJK*i* de la figura de empujes. Existe, pues, un prisma de tierra triangular BX_1X_1' que no se ha tenido en cuenta, y que sin embargo, contribuye al empuje total. Para corregir esta omisión de un modo suficientemente aproximado, puede suponerse que el paramento CB del muro se prolonga un poco por encima del punto B,

hasta su encuentro con una recta paralela á CX_2 ó á BX_1', y trazada por el punto medio de la vertical X_1V que interceptan las dos rectas BX_1 y BX_1'. Se modificará, por lo tanto, el trapecio de empuje $FiKJ$, admitiendo que se prolonga por arriba hasta la horizontal $F'i'$, situada de modo que $FF' = \frac{1}{2} X_1V$.

Aplicando el mismo razonamiento al pasar del lado BC del paramento al lado CD, obtendremos una corrección análoga; se aumentará la altura del trapecio de empuje $JkLM$ hasta el punto J', distante de J de una cantidad igual á la mitad de la vertical X_2V'.

Los tres empujes parciales F, F' y F'' se hallan representados respectivamente por el triángulo EFI y por los dos trapecios $F'i'JK$ y $J'k'LM$; los centros de gravedad de estas tres figuras fijan las alturas de los puntos de aplicación de las fuerzas sobre el paramento.

45. Tratemos ahora de hallar la intensidad y el punto de aplicación de la resultante R de las mismas fuerzas. Para esto no hay más que aplicar un procedimiento que proporciona la estática gráfica.

Debe empezarse por construir el *polígono de fuerzas* EHIJ (fig. 33), cuyos tres lados EH, HI é IJ son paralelos á F, F' y F'', y tienen respectivamente una longitud proporcional á cada una de estas fuerzas tomada á una escala conveniente. La recta que une las extremidades E y J de este polígono, mide en longitud, con arreglo á la misma escala, la intensidad de la resultante, y fija al mismo tiempo su dirección. Se procede luego al trazado del *polígono funicular* MNST, para lo cual debe tomarse un *polo* cualquiera O desde el que se trazan los radios OE, OH, OI y OJ; desde un punto cualquiera M tomado sobre F, se traza MT paralela á OE, y MN paralela á OH; por el punto N se traza NS paralela á OI, y por S una paralela á OJ; el punto T de encuentro de la primera y de la última de estas paralelas pertenece á la resultante R. No queda más que trazar por T una paralela á EJ; dicha paralela fija la verdadera posición de la

resultante del empuje total, cuya intensidad se mide por la longitud EJ.

46. Aunque el procedimiento gráfico que acabamos de indicar para obtener la resultante de varias fuerzas es bastante conocido, por hallarse expuesto en varios tratados de estática gráfica, creemos, sin embargo, oportuno demostrarlo.

Puesto que las dos rectas EH y HI representan la dirección y la intensidad de dos fuerzas, su resultante estará dada por la diagonal del paralelógramo construído sobre dichas rectas; pero esta diagonal será evidentemente la longitud EI. De la misma manera, la resultante de las fuerzas EI é IJ, queda representada por la recta EJ, que es también la diagonal del paralelógramo construído sobre ellas. Así, pues, esta longitud EJ determina en intensidad y en dirección la resultante de las tres fuerzas EH, HI é IJ. Puede suponerse ahora que se reemplaza la fuerza F por dos componentes, cuyas direcciones son EO y OH. Estas longitudes, que representan la intensidad de dichas componentes, puesto que forman los dos lados de un paralelógramo que tiene EH por diagonal, se llevarán sobre MN y sobre MT. Del mismo modo se reemplazará la fuerza F', igual á HI, por sus dos componentes HO y OI, llevadas según NM y según NS; por último, debe aplicarse sobre SN y sobre ST las dos componentes IO y OJ de la fuerza IJ equivalente á F''.

Pero es preciso advertir que las dos componentes de F y de F' que se han llevado sobre MN, son ambas iguales á OH y dirigidas en sentido contrario, de donde resulta que se destruyen mútuamente. De igual modo las dos componentes de F' y de F'' sobre NS, son iguales á OI y actúan en sentido opuesto, anulándose también. Ya no queda, para reemplazar las tres fuerzas F, F' y F'', más que las dos componentes llevadas una sobre MT y la otra sobre ST, y que son respectivamente iguales á OE y á OJ. Es, pues, evidente que la resultante de F, F' y F'' pasará por el punto de encuentro T de estas dos últimas componentes.

El procedimiento que acabamos de explicar para hallar la

resultante del empuje de las tierras sobre el paramento de un muro compuesto de tres planos, puede aplicarse al caso de ser curvo este paramento. Podrá sustituirse entonces la curva de la sección recta por un polígono de cierto número de lados. Se comprende que, cuanto mayor sea este número, tanto más se acerca el resultado á la verdad; sin embargo, no creemos que sea necesario en la práctica llevar demasiado lejos la precisión en los cálculos ó en los trazados, lo que daría lugar á un trabajo excesivo y por demás confuso.

ESTABILIDAD DEL MURO

47. Se ha determinado la intensidad del empuje de las tierras sobre el paramento posterior de un muro, así como la posición de esta fuerza, en la mayor parte de los casos que pueden presentarse. Es necesario ahora comparar la acción que ejerce este empuje con la resistencia ofrecida por el muro, bajo el punto de vista de cada uno de los tres movimientos de la fábrica, considerados de un modo general en el primer capítulo, pero que vamos á examinar de nuevo en el caso particular que nos ocupa, empezando por el movimiento de resbalamiento.

MOVIMIENTO DE RESBALAMIENTO.

48. Para que el muro pueda resbalar sobre su base, es preciso que el rozamiento desarrollado entre la fábrica y el terreno de fundación sobre que descansa sea inferior á la componente horizontal del empuje de las tierras.

Hemos visto que teniendo en cuenta el rozamiento de estas tierras sobre el muro, la resultante del empuje era una fuerza $\frac{Q}{\cos. \varphi'}$ oblicua al paramento, cuya dirección forma un angulo φ' con la normal. Si θ representa el ángulo de dicho paramento con la vertical (fig. 34), tendremos para la componente horizontal

$$\frac{Q}{\cos. \varphi'} \times \cos. (\theta + \varphi')$$

y para la vertical

$$\frac{Q}{\cos.\ \varphi'} \times \text{sen.}\ (\theta + \varphi').$$

Designando siempre por f el coeficiente de rozamiento del muro sobre su base, y P el peso de este muro, el equilibrio estricto da lugar á la ecuación

$$\frac{Q}{\cos.\ \varphi'} \times \cos.\ (\theta + \varphi') = f \left[P + \frac{Q}{\cos.\ \varphi'} \times \text{sen.}\ (\theta + \varphi') \right] \quad [25].$$

En el caso de hallarse en desplome el paramento, habrá que cambiar el signo θ, con lo que se verifica

$$\frac{Q}{\cos.\ \varphi'} \times \cos.\ (\varphi' - \theta) = f \left[P + \frac{Q}{\cos.\ \varphi'} \times \text{sen.}\ (\varphi' - \theta) \right] \quad [26].$$

Por último, si el paramento es vertical, $\theta = 0$, y resulta

$$Q = f\ (P + Q\ \text{tang.}\ \varphi') \qquad [27].$$

Cuando se prescinde del rozamiento de las tierras sobre el muro, las fórmulas [25], [26] y [27], se convierten en

$$Q\ \cos.\ \theta = f\ (P + Q\ \text{sen.}\ \theta) \qquad [28]$$

$$Q\ \cos.\ \theta = f\ (P - Q\ \text{sen.}\ \theta) \qquad [29].$$

$$Q = f\,P \qquad [30].$$

En estas fórmulas habrá que dar á P el valor que corresponde al peso del muro y reemplazar Q por la intensidad del empuje normal, calculado en cada caso particular valiéndose de las fórmulas [8] á [24] de este capítulo.

El movimiento de deslizamiento de un muro sobre la base no es temible en general, cuando se ha dispuesto este muro

para resistir convenientemente al movimiento de giro alrededor de la arista exterior de dicha base y al aplastamiento de los materiales. Sin embargo, si las fundaciones descansan sobre un terreno arcilloso y húmedo, el coeficiente de rozamiento puede presentar un valor bastante reducido, según se indica en el cuadro núm. 1 (**4**); y en semejantes condiciones conviene cerciorarse de que este coeficiente no es inferior al valor de f deducido de las fórmulas [25] á [30]; pues de no ser así, habría que modificar la disposición del muro, y tomar las debidas precauciones para impedir el deslizamiento. No pudiendo verificarse este movimiento en la base, tampoco será temible en una sección horizontal cualquiera hecha en la fábrica; pues aun suponiendo que se ha construído el muro por hiladas ó por capas enrasadas á nivel, bastará el rozamiento sobre los planos de asiento para oponerse á la acción del empuje de las tierras.

MOVIMIENTO DE GIRO.

49. El muro resiste por su peso al movimiento de giro alrededor de la arista exterior de su base, que tiende á imprimirle el empuje de las tierras. Pero para comparar estas acciones deben tomarse los momentos de las fuerzas con respecto á esta arista; así es, que designando por c un coeficiente de estabilidad de rotación mayor que la unidad, podemos establecer

$$\mathcal{M}\mathrm{P} = c \times \mathcal{M} \frac{\mathrm{Q}}{\cos.\ \varphi'} .$$

Hallaremos el momento del peso del muro (fig. 34), añadiendo los momentos del triángulo exterior CDL, del rectángulo DBLM y del triángulo intericr MBA. Desígnese por

n el talud exterior ó la tangente del ángulo CDL;

e la relación del ancho de coronación á la altura del muro;

m el talud interior ó la tangente del ángulo ABM, igual á θ;

δ' la densidad de la mampostería;

H la altura del muro.

El momento del peso de este muro será

$$\mathcal{M}P=\delta'\left[\frac{nH^2}{2}\times\frac{2}{3}nH+eH^2\left(nH+\frac{eH}{2}\right)+\frac{mH^2}{2}\left(nH\right.\right.$$

$$\left.\left.+eH+\frac{mH}{3}\right)\right]=\delta'H^3\left[\frac{e^2}{2}+\left(n+\frac{m}{2}\right)e+\frac{n^2}{3}+\frac{mn}{2}+\frac{m^2}{6}\right].$$

Para hallar el momento del empuje oblicuo $\frac{Q}{\cos.\varphi'}$, que forma, según sabemos, un ángulo φ' con la normal al paramento del muro, advertiremos que su brazo de palanca CE es la diferencia de AI y AJ. La recta AI, perpendicular á OE, tiene por valor AO $\cos.\varphi'$, y si designamos por $\frac{1}{r}$ la relación existente entre la altura del punto de aplicación del empuje y la altura del muro, tendremos $AO=\frac{H}{r\cos.\theta}$. Por último, la longitud JA está expresada por

$$JA=CA\ \text{sen.}\ (\varphi'+\theta)=(Hn+He+Hm)\ \text{sen.}\ (\varphi'+\theta).$$

El brazo de palanca del empuje será

$$CE=\frac{H}{r\cos.\theta}\cos.\varphi'-H\,(n+e+m)\ \text{sen.}\ (\varphi'+\theta),$$

y el momento del empuje

$$\mathcal{M}\frac{Q}{\cos.\varphi'}=\frac{Q}{\cos.\varphi'}\,H\left[\frac{\cos.\varphi'}{r\cos.\theta}-(n+m+e)\ \text{sen.}\,(\varphi'+\theta)\right].$$

Al mismo resultado se llega reemplazando el empuje oblicuo $\frac{Q}{\cos.\varphi'}$ por sus dos componentes perpendicular y paralela al paramento interior del muro. La primera componente, cuyo valor es Q, tiene por brazo de palanca (fig. 35),

$$CE=H\left[\frac{1}{r\cos.\theta}-(n+e+m)\ \text{sen.}\ \theta\right].$$

La segunda es Q tang. φ', y actúa con un brazo de palanca

$$CJ = H\,(n + e + m)\cos.\theta.$$

Tomando los momentos de estas dos componentes, que tienden á hacer girar el muro en sentido contrario, y sumándolos algebráicamente, se llega á la misma expresión obtenida para el momento del empuje resultante $\frac{Q}{\cos.\varphi'}$.

Si sustituímos en la ecuación de equilibrio los valores del momento del muro y del momento del empuje, resulta

$$\delta'\left[\frac{e^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2}\right)e + \frac{n^2}{3} + \frac{mn}{2} + \frac{m^2}{6}\right]$$
$$= \frac{cQ}{H^2\cos.\varphi'}\left[\frac{\cos.\varphi'}{r\cos.\theta} - (n + e + m)\,\text{sen.}\,(\varphi' + \theta)\right].$$

Ordenando con respecto á e y dividiendo por $\frac{\delta'}{2}$,

$$e^2 + \left[2\left(n + \frac{m}{2}\right) + \frac{2cQ}{\delta' H^2\cos.\varphi'}\,\text{sen.}\,(\varphi' + \theta)\right]e$$
$$= \frac{2cQ}{\delta' H^2\cos.\varphi'}\left[\frac{\cos.\varphi'}{r\cos.\theta} - (n + m)\,\text{sen.}\,(\varphi' + \theta)\right]$$
$$-2\left(\frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6}\right) \qquad [31].$$

Se deduce de esta expresión el valor de e, que permite fijar la latitud de coronación del muro $E = eH$, en cuanto se haya sustituído en dicha expresión la intensidad del empuje Q calculado por medio de las fórmulas [8] ó [9], y después de reemplazar $\frac{1}{r}$ por la relación entre la altura del punto de aplicación del empuje y la del muro.

50. Haciendo abstracción del rozamiento de las tierras sobre la fábrica, se tiene, en el caso de ser ataluzado el paramento interior

$$e^2+\left[2\left(n+\frac{m}{2}\right)+\frac{2cQ}{\delta'H^2}\,\text{sen.}\,\theta\right]e$$

$$=\frac{2cQ}{\delta'H^2}\left[\frac{1}{r\cos.\theta}-(n+m)\text{sen.}\theta\right]-2\left(\frac{n^2}{3}+\frac{nm}{2}+\frac{m^2}{6}\right)\quad[32];$$

si este paramento está en desplome, hay que cambiar los signos de θ y de m, resultando

$$e^2+\left[2\left(n-\frac{m}{2}\right)-\frac{2cQ}{\delta'H^2}\,\text{sen.}\,\theta\right]e$$

$$=\frac{2cQ}{\delta'H^2}\left[\frac{1}{r\cos.\theta}+(n-m)\text{sen.}\theta\right]-2\left(\frac{n^2}{3}-\frac{nm}{2}+\frac{m^2}{6}\right)\quad[33].$$

Hallándose en desplome el paramento interior, puede suceder que el muro sea de igual espesor en toda su altura, es decir, que los dos paramentos sean paralelos; se verifica entonces $n=m$, y la ecuación anterior se reduce á

$$e^2+\left[m-\frac{2cQ}{\delta'H^2}\,\text{sen.}\,\theta\right]e=\frac{2cQ}{\delta'H^2}\times\frac{1}{r\cos.\theta}\qquad[34].$$

El paramento en contacto con las tierras puede ser vertical y el exterior con talud; se hace en este caso en las ecuaciones [32] y [33] $m=0$, $\text{sen.}\,\theta=0$, $\cos.\,\theta=1$, y resulta

$$e^2+2ne=\frac{2cQ}{\delta'H^2r}-\frac{2n^2}{3}\qquad[35].$$

Por último, siendo verticales los dos paramentos del muro, se verifica $n=0$, y

$$e^2=\frac{2cQ}{\delta'H^2r}\qquad[36].$$

51. Las expresiones [32] á [36] y también la ecuación [31], suponen que el terraplén termina en la parte superior de una manera cualquiera; el valor de Q se calculará por las fórmulas [8] y [9], y la fracción $\frac{1}{r}$ podrá ser diferente de $\frac{1}{3}$. Pero si admitimos que este terraplén se halla limitado arriba por un plano que arranca de la arista interior de la coronación, tendremos entonces $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$; el empuje de las tierras se obtendrá empleando las mismas fórmulas [8] ó [9], después de determinar el valor de BX ó bien el de AX′ (fig. 28); pero hay que recordar que en este caso las secciones del prisma de máximo empuje, correspondientes á distintas alturas de muro á partir de la coronación, son semejantes, de donde se deduce que los pesos de estos prismas, y por tanto, los empujes correspondientes, son proporcionales á los cuadrados de los lados homólogos, ó á los cuadrados de las alturas. Si representamos, pues, por Q′ la intensidad del empuje de las tierras sobre el primer metro de la altura del muro á partir de arriba, tendremos

$$Q = Q'H^2,$$

para el empuje correspondiente á una altura H.

Poniendo $Q'H^2$ por Q en las ecuaciones [31] á [36], desaparece entonces la altura H, lo que demuestra que cuando el terraplén parte de la arista interior de la coronación formando un plano, la relación e de la latitud superior del muro á su altura es independiente de esta última.

Prescindiremos de escribir las nuevas ecuaciones que corresponderían al caso que estamos examinando, pues las modificaciones que habría que introducir en las ecuaciones [31] á [36], se reducen á suprimir H, á acentuar Q y á hacer $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$. Nos limitaremos á indicar las simplificaciones de que son susceptibles las expresiones [35] y [36] relativas á un paramento interior vertical, cuando el terraplén enrasa de nivel la corona-

ción. Se verifica entonces, según la fórmula [16],

$$Q' = \frac{Q}{H^2} = \frac{\delta}{2} \text{ tang.}^2 \beta;$$

y haciendo además $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$, resulta

$$e^2 + 2ne = \frac{\delta}{\delta'} \frac{c \text{ tang.}^2 \beta}{3} - \frac{2n^2}{3} \qquad [37],$$

cuando el paramento exterior del muro presenta un talud n; y

$$e^2 = \frac{\delta}{\delta'} \frac{c \text{ tang.}^2 \beta}{3} \qquad [38],$$

si ambos paramentos son verticales.

52. Consideremos el mismo caso del terraplén á nivel, pero admitamos que sustenta una sobrecarga representada por una capa de tierra cuyo espesor es h, tendremos (**42**) (fig. 30)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{3} \times \frac{H + 3h}{H + 2h} = \frac{AR}{H}$$

y las ecuaciones [32] á [36], se convierten en las siguientes:

$$e^2 + \left[2\left(n + \frac{m}{2}\right) + \frac{2cQ}{\delta' H^2} \text{ sen. } \theta\right] e = \frac{2cQ}{\delta' H^2}\left[\frac{H + 3h}{3(H + 2h) \cos. \theta}\right.$$
$$\left. - (n + m) \text{ sen. } \theta\right] - 2\left(\frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6}\right) \qquad [39],$$

cuando el paramento interior está en talud;

$$e^2 + \left[2\left(n - \frac{m}{2}\right) - \frac{2cQ}{\delta' H^2} \text{ sen. } \theta\right] e = \frac{2cQ}{\delta' H^2}\left[\frac{H + 3h}{3(H + 2h) \cos. \theta}\right.$$
$$\left. + (n - m) \text{ sen. } \theta\right] - 2\left(\frac{n^2}{3} - \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6}\right) \qquad [40].$$

cuando el paramento interior está en desplome;

$$e^2 + \left[m - \frac{2cQ}{\delta' H^2} \text{sen. } \theta \right] e = \frac{2cQ}{\delta' H^2} \times \frac{H + 3h}{3(H + 2h) \cos. \theta}, \quad [41]$$

con ambos paramentos paralelos y en desplome el interior;

$$e^2 + 2ne = \frac{2cQ}{\delta' H^2} \times \frac{H + 3h}{3(H + 2h)} - \frac{2n^2}{3}, \quad [42]$$

si el paramento interior es vertical y el exterior con talud;

$$e^2 = \frac{2cQ}{\delta' H^2} \times \frac{H + 3h}{3(H + 2h)}, \quad [33]$$

en el caso de ser verticales los dos paramentos.

En las ecuaciones [39] á [43], relativas á un terraplén con sobrecarga, se darán á Q los valores que resultan de las fórmulas [21], [22], [24], según que el paramento interior del muro ofrezca talud, se halle en desplome, ó sea vertical.

MOVIMIENTO DE APLASTAMIENTO.

53. Los materiales de que se compone un macizo de mampostería se encuentran más ó menos expuestos al aplastamiento, según sea la intensidad de la presión unitaria á que están sometidos. Hemos visto en el capítulo 1.°, que esta intensidad varía en general para los distintos puntos de una misma sección del macizo, y que su mayor valor dependía, no sólo de la magnitud de la componente normal á dicha sección de la resultante de todos los esfuerzos actuantes, sino también de la posición del punto de aplicación de este componente con respecto al centro de gravedad de la sección.

Hemos dado en el mismo capítulo las fórmulas que permiten calcular la presión unitaria máxima para un gran número de formas de sección; pero la aplicación de estas fórmulas exige que previamente se fije la posición del esfuerzo normal.

Considérese una sección vertical ABCD en forma de trape-

cio (fig. 36), y perteneciente á un muro del que se toma una longitud de un metro en sentido perpendicular á la figura. Este muro se halla sometido á la acción de una fuerza Q normal ú oblicua al paramento AB, que podrá proceder del empuje de las tierras. Prolonguemos la coronación BC de una cantidad CF igual á la base DA, y prolonguemos también esta base en sentido contrario de una longitud AM igual al ancho BC de coronación; uniendo los dos puntos F y M por una recta, cortará ésta á la mediana IJ del trapecio en el punto G, centro de gravedad de la figura. Trácese por este centro una vertical que encontrará en N á la prolongación de la fuerza Q; sobre la vertical y á partir de N, se llevará la longitud NK proporcional al peso del muro, y sobre la dirección de la fuerza Q, partiendo siempre del mismo punto, se llevará NS proporcional á dicha fuerza; terminando el paralelógramo KNSL, se obtiene la diagonal NL, que representa en dirección y en intensidad la resultante final. Esta resultante corta á la base en el punto E, que es el punto de aplicación de la fuerza normal, cuya intensidad está representada por la componente vertical de la resultante NL; dicha fuerza normal está dada también por el peso del muro, al que hay que agregar la componente vertical de la fuerza Q.

54. Habiendo hecho estas operaciones, se tendrán los elementos necesarios para el cálculo de la máxima presión unitaria en la base DA del muro. Presentando esta base la forma de un rectángulo, habrá que emplear una de las dos fórmulas [3 y 4] (**11**) de la ley del trapecio aplicables á una sección rectangular, en las que se reemplazará P por la fuerza normal, d por la distancia DE y b por el ancho DA de la base. Deberá emplearse la primera ó la segunda de estas dos fórmulas, según que la distancia $d =$ DE, sea mayor ó menor que el tercio de b.

Admitamos que se subdivide el muro (fig. 37), por medio de secciones horizontales D'A', D''A'', D'''A''', cada una de las cuales se considera como base de la parte de macizo que está encima. Podrá aplicarse la construcción gráfica antes descrita

á todos los macizos parciales, teniendo presente que los diversos pesos P′, P″, P‴, son proporcionales á las respectivas superficies CBD′A′, CBD″A″, CBD‴A‴, y que las fuerzas exteriores Q′, Q″, Q‴, serán variables con la altura del macizo parcial, si es que se admite que proceden del empuje de las tierras. Dichas construcciones determinarán los puntos de paso E′, E″, E‴ sobre cada una de las bases, y uniendo estos puntos se obtendrá la curva llamada de *presión*.

La sección vertical CD del paramento exterior del muro puede ser tal, que esta curva se acerque más ó menos á ella y hasta llegue á cortarla. Sabemos que cuando la resultante corta á la base en su interior, el macizo no puede girar; pero sucede lo contrario si dicha resultante cae fuera, según tiene lugar para la sección D″A″. Se sabe también que en el caso de ser la distancia DE, del punto de paso de la resultante á la arista de rotación, mayor que el tercio de la base, la presión unitaria máxima es menor que el duplo de la presión media; la mínima es menor que dicha presión media, pero positiva. Si, por el contrario, la distancia DE no llega al tercio de la base, la presión máxima supera al doble de la media y la mínima es negativa.

Según se ve por lo que acabamos de decir, el trazado de la curva de presión es de suma utilidad para poder hacerse cargo de las condiciones de resistencia de un macizo de mampostería en sus diversas partes. El trazado de esta curva se hará, como hemos indicado, aplicando el procedimiento gráfico á las distintas secciones horizontales hipotéticas del macizo, considerando á cada una como base de la parte que se halla encima, y cuyo número puede ser tan grande como se quiera.

55. Pero puede también determinarse, valiéndose del cálculo, la distancia del punto de paso de la resultante á la arista de rotación de la base. Consideremos al efecto (fig. 38), la misma sección trapezoidal ABCD de un macizo sometido á la acción de la fuerza exterior Q. Reemplazaremos esta fuerza por sus dos componentes vertical y horizontal Q_v y Q_h; sumando Q_v con el peso P del macizo, se obtiene una nueva fuerza vertical que

designaremos por ΣP y está situada á la derecha del centro de gravedad G de la sección; es evidente que ΣP, compuesta á la vez con Q_h, dará la resultante final R. Pero si tomamos los momentos de las dos componentes ΣP y Q_h, con respecto al punto E perteneciente á la resultante, y si se añaden algebráicamente estos momentos, teniendo en cuenta el sentido de la rotación, se obtendrá forzosamente un resultado nulo. Podemos, pues, establecer

$$Q_h \times JF - \Sigma P \times (DF - DE) = 0,$$

de donde se deduce

$$DE = \frac{\Sigma P \times DF - Q_h \times JF}{\Sigma P};$$

pero $\Sigma P \times DF$ es el momento de las fuerzas verticales con respecto á la arista de rotación D de la base, y $Q_h \times JF$ constituye el momento de las componentes horizontales referido al mismo punto; tendremos, por lo tanto, para el valor de la distancia DE, que llamaremos d,

$$d = \frac{\mathcal{M}.\Sigma P - \mathcal{M} Q_h}{\Sigma P} \qquad [44].$$

Esta expresión es general y aplicable también al caso en que el macizo estuviera sometido á la acción de varias fuerzas exteriores de distinta naturaleza; una de ellas podría ser variable con la altura del macizo y análoga al empuje de las tierras; las demás constantes y aplicadas en puntos fijos de los paramentos, procediendo, por ejemplo, del empuje de una ó más bóvedas. Dicha expresión de d se traduce al lenguaje ordinario, diciendo: *la distancia del punto de paso de la resultante á la arista de rotación es igual á la suma algebráica de los momentos de las fuerzas dividida por la suma de las componentes verticales.*

Podrá hacerse la descomposición de fuerzas según la vertical y según la horizontal, y tomando sucesivamente los momentos de cada una de estas componentes se añadirán después, no quedando más que dividir esta suma de momentos por la suma de las componentes verticales. Pero habrá que atender al signo de cada momento parcial, según el sentido de la rotación que la componente tiende á imprimir al cuerpo. Así, por ejemplo, formando el macizo el estribo de un puente que por un lado recibe el empuje de las tierras y por el otro el de una bóveda, si queremos hallar la distancia del punto de encuentro de la resultante con la base á la arista de giro, tomando la que está del lado de las tierras, tendremos para el momento de la componente horizontal del empuje de la bóveda que tiende á volcar el macizo una cantidad negativa; por el contrario, el empuje de las tierras que se oponen al vuelco, dará un resultado positivo para el momento de su componente horizontal.

56. La expresión de la distancia d que hemos hallado, se deduce también muy sencillamente del teorema de estática que establece, que el momento de la resultante de un sistema de fuerzas situadas en un plano, con respecto á un punto del mismo, es igual á la suma de momentos de las fuerzas tomados con relación á dicho punto.

En efecto; designemos por F una cualquiera de las fuerzas que actúan sobre el macizo ABCD (fig. 38), y por R la resultante, que supondremos tener la posición JL, y cuyo brazo de palanca con respecto al punto de giro D será la longitud DL perpendicular á JL. El teorema expresado permite establecer la ecuación

$$R \times DL = \Sigma \mathcal{M} F,$$

de donde se deduce

$$DL = \frac{\Sigma \mathcal{M} F}{R};$$

dividiendo los dos miembros de esta ecuación por el coseno del

ángulo LJF que la resultante forma con la vertical, ángulo que llamaremos θ y que es también igual al ángulo EDL, resulta

$$\frac{\mathrm{DL}}{\cos.\ \theta} = \frac{\Sigma \mathcal{M}\mathrm{F}}{\mathrm{R}\cos.\ \theta}.$$

Pero el primer miembro representa la longitud DE, ó sea la distancia del punto de encuentro de la resultante con la base á la arista de giro; el numerador del segundo miembro expresa la suma algebráica de los momentos de todas las fuerzas, entendiéndose que cada momento debe tomarse con el signo que le corresponde; el denominador equivale á la proyección vertical de la resultante, ó bien suponiendo que cada una de las fuerzas ha sido reemplazada por sus componentes horizontal y vertical, el producto R cos. θ dará evidentemente la suma de las componentes verticales, suma que hemos designado por ΣP; se tiene, pues,

$$d = \frac{\Sigma \mathcal{M}\mathrm{F}}{\Sigma \mathrm{P}} \qquad [44].$$

Para simplificar el lenguaje, llamaremos á la distancia d ó DE, *distancia de la resultante á la arista de giro*, debiendo entenderse con esta denominación que se trata de la distancia horizontal medida sobre la base ó sobre otra sección que le sea paralela, por más que la verdadera distancia esté representada por la longitud DL.

57. Apliquemos la regla que precede á los muros de sostenimiento. Hemos hallado para el momento del peso del muro (**49**)

$$\mathcal{M}\mathrm{P} = \delta'\mathrm{H}^3\left[\frac{e^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2}\right)e + \frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6}\right].$$

El empuje de las tierras constituye una fuerza que forma con el horizonte un ángulo $\varphi' + \theta$, su componente vertical

tendrá por momento

$$\frac{Q \text{ sen. } (\varphi' + \theta)}{\cos. \varphi'} \times \left[n + e + \frac{m(r-1)}{r} \right] H;$$

el momento de la componente horizontal es de signo contrario, y tiene el valor

$$\frac{Q \cos. (\varphi' + \theta)}{\cos. \varphi'} \times \frac{H}{r};$$

finalmente, la suma de las fuerzas verticales está dada por el peso del muro, al que se agregará la componente vertical del empuje, verificándose

$$\Sigma P = \delta' \left(\frac{n}{2} + e + \frac{m}{2} \right) H^2 + Q \frac{\text{sen. } (\varphi' + \theta)}{\cos. \varphi'}$$

y se obtendrá para la distancia de la resultante á la arista de giro

$$d = \frac{\delta' H^3 \left[\frac{e^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2} \right) e + \frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6} \right]}{\delta' \left(\frac{n}{2} + e + \frac{m}{2} \right) H^2 + Q \frac{\text{sen. } (\varphi' + \theta)}{\cos. \varphi'}}$$

$$+ \frac{Q \frac{\text{sen. } (\varphi' + \theta)}{\cos. \varphi'} \left[n + e + \frac{m(r-1)}{r} \right] H - Q \frac{\cos. (\varphi' + \theta)}{\cos. \varphi'} \frac{H}{r}}{\delta' \left(\frac{n}{2} + e + \frac{m}{2} \right) H^2 + Q \frac{\text{sen. } (\varphi' + \theta)}{\cos. \varphi'}}.$$

Si queremos aplicar esta expresión á un muro de sección dada, á fin de conocer los valores que toma d á diferentes alturas á partir de la coronación, habrá que reemplazar e, que varía con H, por su valor $\frac{E}{H}$, en el que E indica el ancho de coronación que es constante para un mismo muro. Se supondrá

también que el terraplén termina arriba con un plano que arranca de la arista interior de la coronación; en este caso, el empuje obra al tercio de la altura y hay que hacer $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$; la intensidad del empuje será proporcional á H^2 y podremos reemplazar Q por $Q'H^2$. Haciendo estas sustituciones y ordenando con respecto á H, se obtiene

$$d = \frac{\frac{\delta' E^2}{2} + \left[\delta'\left(n + \frac{m}{2}\right) + Q' \frac{\text{sen.}(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\right] EH}{\delta' E + \left[\delta'\left(\frac{n}{2} + \frac{m}{2}\right) + Q' \frac{\text{sen.}(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\right] H}$$

$$+ \frac{\left[\delta'\left(\frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6}\right) + Q' \frac{\text{sen.}(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\left(n + \frac{2}{3}m\right) - \frac{Q'}{3}\frac{\cos.(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\right] H^2}{\delta' E + \left[\delta'\left(\frac{n}{2} + \frac{m}{2}\right) + Q' \frac{\text{sen.}(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\right] H}.$$

Designando por λ el ángulo formado por el paramento exterior del muro con la vertical, es decir, el ángulo cuya tangente es n, y llamando z las longitudes variables tomadas sobre este paramento, á partir de la coronación, podremos reemplazar H por $z \cos. \lambda$, y la expresión de d se convierte en

$$d = \frac{\frac{\delta' E^2}{2} + \left[\delta'\left(n + \frac{m}{2}\right) + Q' \frac{\text{sen.}(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\right] E \cos.\lambda z}{\delta' E + \left[\delta'\left(\frac{n}{2} + \frac{m}{2}\right) + Q' \frac{\text{sen.}(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\right] \cos.\lambda z}$$

$$+ \frac{\left[\delta'\left(\frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6}\right) + Q' \frac{\text{sen}(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\left(n + \frac{2}{3}m\right) - \frac{Q'}{3}\frac{\cos.(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\right] \cos.^2\lambda z^2}{\delta' E + \left[\delta'\left(\frac{n}{2} + \frac{m}{2}\right) + Q' \frac{\text{sen.}(\varphi' + \theta)}{\cos.\varphi'}\right] \cos.\lambda z}.$$

A cada valor de z corresponde otro valor de d; por consiguiente, la ecuación anterior es la ecuación de la curva de

presión. Representa una curva de segundo grado referida á dos ejes de coordenadas oblicuos, que son la horizontal de la coronación y el paramento exterior del muro.

Para conocer la naturaleza de la curva, pondremos la ecuación bajo la forma

$$\delta' \mathrm{E}d + \left[\delta'\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)+\mathrm{Q}'\,\frac{\text{sen.}\,(\varphi'+\theta)}{\cos.\,\varphi'}\right]\cos.\,\lambda z d - \frac{\delta'\mathrm{E}^2}{2}$$

$$-\left[\delta'\left(n+\frac{m}{2}\right)+\mathrm{Q}'\,\frac{\text{sen.}(\varphi'+\theta)}{\cos.\,\varphi'}\right]\mathrm{E}\cos.\lambda z - \left[\delta'\left(\frac{n^2}{3}+\frac{nm}{2}+\frac{m^2}{6}\right)\right.$$

$$\left.+\mathrm{Q}'\,\frac{\text{sen.}\,(\varphi'+\theta)}{\cos.\,\varphi'}\left(n+\frac{2}{3}m\right)-\frac{\mathrm{Q}'}{3}\,\frac{\cos.\,(\varphi'+\theta)}{\cos.\,\varphi'}\right]\cos.^2\lambda z^2 = 0,$$

y la compararemos con la ecuación general de las curvas de segundo grado

$$\mathrm{A}z^2 + \mathrm{B}zx + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}z + \mathrm{E}x + \mathrm{F} = 0.$$

Sabido es que esta última ecuación corresponde á una elipse cuando la expresión $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}$ da un valor menor que cero. Si el resultado es positivo, la curva es una hipérbola; por último, se obtiene una parábola en el caso de $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$. Nuestra ecuación general carece de término en d^2 ó en x^2 de la ecuación tipo; por lo tanto, el coeficiente C es igual á cero, lo que reduce la expresión $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}$ á B^2 simplemente. Pero el coeficiente B está representado en nuestra fórmula por $\left['\delta\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)+\mathrm{Q}'\frac{\text{sen.}\,(\varphi'+\theta)}{\cos.\,\varphi'}\right]\cos.\,\lambda$, su cuadrado no puede ser más que positivo ó nulo; por consiguiente, la curva de presiones será una hipérbola ó una parábola. Adviértase que n, que representa el talud del paramento exterior del muro, es siempre positivo; por lo tanto, si el paramento interior ofrece también talud, m y θ son positivos y el valor de B no puede anularse; la curva será entonces hiperbólica. La parábola no puede tener lugar sino en tanto que el paramento interior está

en desplome, y para cierto valor especial y negativo de $m = \text{tang.}\ \theta$, valor del que depende el de Q', y tal, que la expresión de B se reduzca á cero.

Haciendo abstracción del rozamiento de las tierras sobre el muro, llegaremos á una ecuación de la curva de presión, que creemos inútil reproducir, por ser análoga á la anterior, con la única diferencia de anular el ángulo φ'. Representará igualmente una hipérbola ó una parábola, exigiendo siempre esta última forma cierta inclinación especial del paramento interior en desplome; pero advertiremos que en este caso se llega á la parábola cuando los dos paramentos del muro son verticales, puesto que los tres términos $\frac{m}{2}$, $\frac{n}{2}$ y sen. θ de la expresión de B se reducen separadamente á cero, lo que no se verifica cuando se tiene en cuenta el rozamiento sobre el muro, siendo entonces el resultado Q' tang. φ'.

58. Supongamos ahora que el muro sostiene una carga de agua; deberá modificarse para este caso la ecuación anterior de la curva de presión haciendo $\varphi' = 0$, y poniendo por Q' su valor $\delta \frac{z^2}{2}$. Se ve que los resultados relativos á la forma de la curva han de ser idénticos á los que corresponden al empuje de tierras sin rozamiento sobre el muro.

Si en la expresión que da el valor de la distancia d hacemos $z = 0$, se obtiene

$$d = \frac{\frac{\delta' E^2}{2}}{\delta' E} = \frac{E}{2};$$

lo que indica que la curva de presión arranca del punto medio de la coronación, y es efectivamente lo que debe suceder, puesto que siendo nulo el empuje en la parte superior, no altera de ningún modo la resultante del peso de la primera capa elemental de fábrica.

La expresión hallada de la distancia de la resultante á la arista de giro permite determinar, para el trazado de la curva de

presión, cuantos valores se quiera de dicha distancia. El cálculo no es difícil, pues una vez que se hayan obtenido los valores numéricos de los coeficientes que multiplican las diversas potencias de z, coeficientes que siempre es preciso calcular, aun cuando no quiera conocerse más que la presión en la base del muro, lo demás se reduce á una serie de operaciones aritméticas que pueden simplificarse tomando números enteros para la altura de las diversas fajas en que se subdivide el macizo.

Siendo plano el paramento exterior de un muro, la presión máxima tiene lugar en la base, pues para una sección distinta situada por encima, el peso del macizo que sustenta y también el empuje de las tierras, son menores. Al tratar de las grandes presas de embalse, veremos que el perfil que deberá darse al muro, para que la presión máxima sea la misma en cualquier altura, presenta una forma cóncava. Desde el momento en que se adopta un paramento plano, la presión máxima aumenta con la altura; así es que si se quiere estudiar la estabilidad de un muro de sostenimiento con dicho paramento, y bajo el punto de vista del aplastamiento de los materiales, bastará calcular la presión en la base.

CAPÍTULO III

CONSIDERACIONES PRELIMINARES SOBRE LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS MUROS DE SOSTENIMIENTO

59. Por medio de la teoría de los muros de sostenimiento expuesta en el capítulo anterior, podremos hacernos cargo, con alguna aproximación, de las condiciones de equilibrio de un muro de mampostería sometido al empuje de las tierras; y decimos con alguna aproximación, porque el conocimiento del verdadero estado de equilibrio que realmente tiene lugar, depende de un problema matemáticamente insoluble, como sucede con todos aquellos que se rozan con la práctica de las construcciones. Procede la dificultad de los múltiples elementos que intervienen en la cuestión, elementos que suelen ser muy variables, más ó menos accidentales, y á veces imposibles de prever, sucediendo en muchos casos que es muy difícil conseguir la medida exacta de algunos de ellos.

Se concibe que la solución de este problema debe estribar forzosamente sobre cierto número de hipótesis más ó menos admisibles; podrán eliminarse, por ejemplo, algunos de los elementos de que hemos hablado, especialmente cuando su omisión contribuye á la estabilidad de la construcción, consiguiéndose con esto simplificar las fórmulas, asunto que tiene gran importancia para las aplicaciones prácticas. Hemos determinado la acción ejercida por las tierras sobre el paramento posterior de un muro de sostenimiento, suponiendo que procede

del empuje de un prisma compacto que tiende á desprenderse del macizo general, según una superficie plana, y que no tiene que vencer más resistencias que el rozamiento. Pero es sabido que las tierras presentan cierta cohesión que permite poderlas cortar según un plano vertical de mayor ó menor altura, y es evidente que esta cohesión constituye una resistencia que debe vencer el prisma para ponerse en movimiento, disminuyendo, por lo tanto, la presión sobre el muro. Tampoco puede considerarse como muy rigorosa la hipótesis relativa á la forma plana que afecta la superficie de separación del prisma de empuje, por existir varias causas, entre ellas la misma cohesión, susceptibles de modificarla.

A pesar de estas incertidumbres, la teoría que hemos expuesto ha sido adoptada por la gran mayoría de los constructores. Los que la han propuesto, *Prony*, *Coulomb* y *Français*, no solo hacen abstracción de la cohesión de las tierras, sino que también omiten en sus cálculos el rozamiento de estas tierras sobre el muro. Con posterioridad *Poncelet*, en una memoria publicada en el *Memoriel de l'officier du genie*, año de 1840, trata el asunto con más amplitud, examinando mayor número de casos particulares que sus antecesores; presenta, además, varios procedimientos gráficos de mucho interés, y por último, estudia de nuevo el problema del empuje de las tierras, teniendo en cuenta el rozamiento de las mismas con la fábrica. La memoria de Poncelet va acompañada de tablas numéricas, con las cuales se puede fijar el espesor que debe darse á un muro de sostenimiento en diferentes condiciones de densidad, ó variando el ángulo de rozamiento, y también para distintas posiciones de las tierras sobre la coronación de la fábrica. Contiene además fórmulas prácticas que conducen al mismo resultado.

Debe, sin embargo, advertirse que las tablas de Poncelet, que se ven reproducidas en varias obras de construcción y que sus autores ofrecen como reglas prácticas para la determinación del espesor de los muros, han sido calculadas prescindiendo del rozamiento de las tierras sobre la mampostería, es decir, según la antigua teoría de Coulomb. Formando este rozamiento un ele-

mento resistente, se comprende que al suprimirlo se coloca la obra en mejores condiciones de estabilidad.

60. En cambio la admisión de dicho elemento ofrece, bajo el punto de vista práctico, dos inconvenientes que deben evitarse.

Uno de ellos, y merece tenerse en cuenta, es relativo á la mayor complicación que introduce en los cálculos. El principal objeto que debe proponerse el ingeniero encargado de proyectar una construcción, es estudiar las diferentes condiciones de estabilidad que presenta, según las distintas formas y disposiciones admisibles, á fin de escoger aquella que, á la par que ofrece la debida resistencia, proporciona una prudente economía de material. Difícil y casi imposible es llegar al conocimiento exacto de dicha estabilidad, á causa de las imperfecciones de la teoría que, según hemos dicho, proceden de los numerosos elementos variables que entran en juego. Forman parte de ellos:

1.º La cohesión de las tierras, ya mencionada y susceptible de variar entre límites bastante extensos, y también la cohesión de la mampostería, de que se prescinde igualmente. 2.º La incertidumbre en las densidades de los materiales componentes de la fábrica, así como la densidad de las tierras. Cierto es que mediante experiencias directas pueden conocerse con alguna exactitud estos dos últimos elementos; pero raras veces se acude á este medio, sobre todo tratándose de la formación de un proyecto; lo más general es contentarse con la adopción de datos más ó menos aproximados á la verdad, y aun estas mismas experiencias no darán más que un valor medio, que podrá ser bastante diferente de los valores extremos, sobre todo si las construcciones se hallan distribuídas sobre una extensión de terreno algo importante, como sucede, por ejemplo, con los muros de sostenimiento de las vías de comunicación. 3.º El mayor ó menor esmero en la mano de obra. 4.º Las variaciones en el estado higrométrico de las tierras que pueden alterar de un modo notable el coeficiente de rozamiento, y por lo tanto, el empuje; estas variaciones procederán, por ejemplo, de una falta de buena conservación de la obra, no evitando la penetración de las

aguas de lluvia en el interior del terraplén; puede igualmente dar motivo á estas variaciones la existencia de manantiales más ó menos previstos. 5.° De las sobrecargas accidentales susceptibles de actuar sobre el terraplén de una manera excepcional. 6.° Por último, de un asiento desigual de la mampostería, motivado, ya sea por un defecto de construcción, ya por el suelo de las fundaciones, ó por haber cargado el muro demasiado pronto, sin dar tiempo á que la fábrica adquiera alguna consistencia.

La variabilidad de todos estos elementos hace ver que es completamente inútil llevar demasiado lejos la exactitud en la determinación de la estabilidad de una obra, y que al simplificar los cálculos con la eliminación de algunos de estos elementos que contribuyan á la resistencia, como sucede con el rozamiento de las tierras sobre el muro, puede facilitarse el estudio del problema en sus diversos casos, sin que por esto dejen de conseguirse resultados suficientemente aproximados para la práctica.

Hemos dicho que la introducción en los cálculos del rozamiento de las tierras sobre el paramento del muro presentaba un segundo inconveniente. Consiste éste en la dificultad de poder precisar la verdadera importancia que en el equilibrio tiene dicho elemento resistente. Es evidente que no puede asignársele un valor superior al menor de los que le correspondan en las distintas condiciones en que se halle una misma construcción; pero creemos que este valor puede llegar á ser tan pequeño que convenga prescindir de él, y esto á pesar de la importancia real que puede adquirir este rozamiento, según demuestran las siguientes experiencias de algunos constructores, que creemos oportuno dar á conocer.

61. Experiencias de Ardant.—Sobre un tablero ó mesa horizontal PN (fig. 39), se coloca la arista C de un prisma de madera de sección triangular ABC, teniendo el ángulo A recto y el ACI formado por el lado CA y la mediana CI igual á 35°, ó sea igual al ángulo del talud natural de la arena silícea empleada en la experiencia. El prisma que viene á sustituir á

un muro de sostenimiento, se apoya lateralmente por el lado CA sobre un macizo ACHN que forma cuerpo con la mesa, pero en tal situación, que la mediana CI sea vertical. El prisma y el macizo se hallan además comprendidos entre dos paredes ó tableros verticales que permiten el movimiento del prisma.

Con semejante posición, tiene este su centro de gravedad sobre CI y se halla además en equilibrio inestable; de modo que á la menor sacudida caerá hacia la izquierda, girando alrededor de la arista C. Pero si después de haber extendido en el paramento AB una ligera capa de goma se espolvorea sobre la misma un poco de arena, á fin de conseguir que el ángulo de rozamiento φ' sea igual á φ, y si además se vierte arena en el cajón formado, hasta cierta altura BL, se observa que el equilibrio es ya estable. Se explica el resultado advirtiendo que el rozamiento de la arena sobre la cara AB del prisma da lugar á un empuje oblicuo, cuyo punto de aplicación O se halla situado entre A é I, y cuya dirección debe formar además un ángulo φ' con la normal á AB. Pero como hemos hecho este ángulo igual á φ, es decir, igual á 35°, que es el valor del ángulo ICA del prisma, siendo, por otra parte, la normal paralela al lado CA, se deduce que la resultante del empuje toma una dirección paralela á la mediana CI, colocada verticalmente, y apoya al prisma sobre el macizo ACHN. Si no existiera el rozamiento sobre AB, el empuje sería normal á este paramento y haría girar al prisma alrededor de la arista C.

62. Experiencia de Flamant.—Consiste en colocar en el interior de un cajón abierto por arriba (fig. 40), un prisma de madera de sección rectangular, muy ligero ó hueco, y de una longitud igual al ancho del cajón. Llenando éste de arena por detras del prisma se produce un empuje oblicuo, cuya prolongación corta en su interior á la base del prisma, siempre que se le dé el suficiente espesor. Habrá entonces equilibrio estable, mientras que si no existiese el rozamiento de la arena sobre el paramento del prisma, el empuje sería forzosamente horizontal y haría girar al referido prisma que, atendida su ligereza, no podría oponerse al movimiento.

63. Experiencia de Backer.—Esta experiencia es muy semejante á la de Flamant; la única diferencia que entre las dos existe se reduce á reemplazar el prisma que representa al muro por maderos sobrepuestos y cuyo ancho sea suficiente; se emplea, además, en la experiencia de Backer en lugar de arena, piedra machacada de pequeño tamaño.

64. Las experiencias que acabamos de indicar permiten apreciar la importancia que puede adquirir el rozamiento desarrollado con el contacto de las tierras sobre el muro; pero hay que tener presente que dichas experiencias se han verificado empleando en ellas arena muy seca ó piedra partida, es decir, materiales incompresibles, casi desprovistos de cohesión y que actúan siempre de un modo inalterable. No sucede lo mismo en la práctica de las construcciones.

Los materiales de que se componen los grandes terraplenes contenidos con muros de sostenimiento, son más ó menos arcillosos. Es cierto que mediante uno ó varios experimentos será posible determinar el valor medio del ángulo φ de rozamiento de las tierras sobre ellas mismas, y si suponemos que colocadas estas últimas detras del muro conservan indefinidamente un mismo grado de compacidad, podremos asignar al ángulo φ' de rozamiento sobre la mampostería el mismo valor hallado para φ, de conformidad con el criterio de algunos constructores, que respecto á este punto nos parece bastante lógico. En efecto; las asperezas de la fábrica en el paramento interior del muro darán lugar á un rozamiento que no ha de ser inferior al de las tierras sobre ellas mismas, pero tampoco debe considerarse como superior, puesto que llenándose los huecos de dichas asperezas con el material desmenuzable que constituye el terraplén, se llega en definitiva á un contacto entre dos superficies de igual naturaleza.

Pero este valor del ángulo φ' no debe admitirse sino en tanto que las tierras se conservan siempre en el mismo estado, lo que pocas veces se verifica. Puede suceder que á consecuencia de introducirse el agua de lluvia detrás del muro, se forme en la superficie de contacto con la fábrica una capa más ó menos

reblandecida que anule el rozamiento casi por completo. Las alternativas de sequía y de humedad son susceptibles de dar lugar á la formación de grietas situadas á proximidad del paramento del muro, con lo que se facilita el paso del agua. Estas mismas grietas interrumpen durante cierto tiempo y sobre una altura más ó menos considerable, el contacto de las tierras con la fábrica, y por lo tanto, el empuje; pero puede éste desarrollarse bruscamente á consecuencia de un desprendimiento de tierras producido por una causa cualquiera, dando entonces lugar á un efecto dinámico, que quita toda importancia al rozamiento sobre el muro.

Las consideraciones que acabamos de exponer demuestran que hay que desconfiar en la práctica del valor que puede atribuirse al rozamiento de las tierras sobre la mampostería; pero creemos necesario insistir aun más sobre este punto, apoyando nuestro aserto con nuevos razonamientos.

65. La regla práctica muy conocida, y que consiste en dar á un muro de sostenimiento, cuyos paramentos son verticales, un espesor igual al tercio de la altura del muro, es generalmente adoptada por todos los constructores, pues una larga experiencia ha demostrado que en los casos más usuales proporciona una buena estabilidad, á la par que una prudente economía. Pero esta regla se deduce precisamente de la antigua teoría del empuje de las tierras, es decir, de los principios que hemos expuesto, haciendo caso omiso del rozamiento sobre el muro. En efecto; la ecuación de equilibrio [38] hallada en el capítulo 2.° (**51**), para un muro con paramentos verticales sosteniendo un terraplén enrasado de nivel con la coronación, es

$$e^2 = \frac{\delta}{\delta'} \; \frac{c \text{ tang.}^2 \beta}{3},$$

en la que e designa la relación del espesor á la altura del muro. Tomemos los datos medios generalmente aceptados y hágase en esta ecuación:

$c = 2$, para el coeficiente de estabilidad;

$\delta = 1.600$ k., para el peso del metro cúbico de las tierras;

La verticalidad del paramento (figura 41), da lugar á $\alpha + \beta = 90^o$. Haciendo, además, $\varphi' = \varphi$, resulta

$$Q' = \frac{\delta}{2} \overline{AX'}^2 \cos.^2 \varphi'.$$

Es preciso ahora calcular el valor de AX'. Si hacemos $AB = 1$, se tiene

$$AO = \frac{AB}{\cos. 2\varphi} = \frac{1}{\cos. 2\varphi}$$

$$AK' = AB \frac{\text{sen.}(\alpha + \beta - \varphi)}{\text{sen.}(\alpha + \beta + \varphi)} = AB \frac{\text{sen.}(90 - \varphi)}{\text{sen.}(90 + \varphi)} = AB = 1.$$

$$OK' = OA - AK' = \frac{1}{\cos. 2\varphi} - 1,$$

$$OX' = \sqrt{OA \times OK'} = \sqrt{\frac{1}{\cos. 2\varphi}\left(\frac{1}{\cos. 2\varphi} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos. 2\varphi} \sqrt{1 - \cos. 2\varphi}$$

$$AX' = OA - OX' = \frac{1}{\cos. 2\varphi} - \frac{1}{\cos. 2\varphi} \sqrt{1 - \cos. 2\varphi}$$

$$= \frac{1}{\cos. 2\varphi} (1 - \sqrt{1 - \cos. 2\varphi}).$$

Hágase $\varphi = 40^o$; se obtiene $AX' = 0{,}524$, y sustituyendo además este valor en la expresión de Q', para la que se toma $\delta = 1.600$ kils., resulta $Q' = 128^{k.},8$. Por último, observando que $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$, la ecuación de equilibrio se convierte, después de sustituir Q, en

$$e^2 + 0{,}0983\, ce = 0{,}039\, c.$$

$\delta' = 2.200$, para el peso de igual volumen de mampostería;
$\varphi = 40°$, para el ángulo del talud natural de las tierras, de donde resulta

$\beta = \frac{90 - \varphi}{2} = 25°$, para el ángulo del prisma de máximo empuje.

Se tiene sustituyendo

$$e = \sqrt{\frac{1.600}{2.200} \times \frac{2 \times \overline{0,4662}^2}{3}} = 0,325,$$

lo que efectivamente indica la relación del tercio.

66. Supongamos ahora que se quiere tener en cuenta el rozamiento de las tierras sobre el muro. Daremos á este rozamiento el mismo valor que al de las tierras sobre sí mismas, es decir, que se hará $\varphi' = \varphi$. Para tratar este caso, emplearemos la ecuación general de equilibrio [31], que es relativa al movimiento de giro (**49**)

$$e^2 + \left[2\left(n + \frac{m}{2}\right) + \frac{2cQ}{\delta' \cos. \varphi' H^2} \operatorname{sen.} (\varphi' + \theta) \right] e$$

$$= \frac{2cQ}{\delta' \cos. \varphi' H^2} \left[\frac{\cos. \varphi'}{r \cos. \theta} - (n+m) \operatorname{sen.} (\varphi' + \theta) \right] - 2\left(\frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6}\right).$$

Introduciendo en esta ecuación las simplificaciones relativas á la condición de verticalidad de los paramentos, es decir, haciendo $m = \operatorname{tang.} \theta = 0$, se obtiene

$$e^2 + \frac{2cQ}{\delta' \cos. \varphi' H^2} \operatorname{sen.} \varphi' \times e = \frac{2cQ \cos. \varphi'}{\delta' \cos. \varphi' \times r H^2}.$$

Como se supone que el terraplén enrasa de nivel, se puede reemplazar $\frac{Q}{H^2}$ por el empuje Q' sobre un metro de altura, cuyo valor es [9] (**27**)

$$Q' = \frac{\delta}{2} \overline{AX'}^2 \operatorname{sen.} (\alpha + \beta + \varphi') \cos. \varphi'.$$

Demos á la relación e del espesor á la altura el valor $\frac{1}{3}$, y resulta

$$c = \frac{1}{9} \times \frac{1}{0,00629} = 17,66.$$

Es decir, que fijando el espesor de un muro de sostenimiento á un tercio de su altura, y si se admite además la existencia de un rozamiento sobre el paramento interior igual al de las tierras sobre las mismas, se llega á un coeficiente de estabilidad casi igual á 18.

Este resultado indica que el rozamiento de las tierras sobre el paramento interior de la fábrica no puede ofrecer constantemente el valor que se le ha atribuído, pues la experiencia demuestra que un muro de sostenimiento, cuyo espesor es la tercera parte de la altura, no necesita un aumento de empuje de tanta consideración para ser derruído.

Podemos apreciar mejor la exagerada importancia que se da á este rozamiento, al hacerlo igual al de las tierras sobre ellas mismas, calculando por separado los momentos del peso del muro y de las componentes horizontal y vertical del empuje.

El momento del peso del muro es. . . . . $\frac{\delta'}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$ $= 122,22$

El momento de la componente horizontal del empuje. . . $\frac{1}{3} \times 128,88$ $= 42,96$

El momento de la componente vertical del empuje. . . . $\frac{1}{3} \times 128,88 \times 0,839 =$ $36,04$

Diferencia entre los momentos de las dos componentes.. 6,92

Vemos, pues, que el momento de la componente vertical, ó el momento del rozamiento de las tierras sobre el muro, es casi tan grande como el momento del empuje horizontal, y que la diferencia entre estos dos momentos, que es equivalente

al momento del empuje resultante oblicuo $\frac{Q}{\cos. \varphi'}$, ofrece un valor muy reducido comparándolo con la resistencia del muro.

67. Tratemos ahora de hallar el espesor que debería darse á un muro con ambos paramentos verticales para conseguir un coeficiente de estabilidad igual á 2, teniendo siempre en cuenta el rozamiento de las tierras sobre la mampostería. En la anterior ecuación de equilibrio (**66**) haremos $c = 2$, y resolviendo con respecto á e, se obtiene

$$e^2 + 0,1966\, e = 0,078;$$

de donde se deduce $e = 0,198$.

Pero este valor es insuficiente, pues la experiencia demuestra á menudo que un muro de sostenimiento rectangular, cuyo espesor es el quinto de la altura, no se halla en condiciones de poder hacer frente al gran número de eventualidades á que se halla expuesta semejante construcción en la práctica.

68. La supresión, en los cálculos, del rozamiento de las tierras sobre el muro, puede también fundarse en una nueva consideración, á la que atribuímos gran importancia. Constituye este rozamiento una fuerza de resistencia efectiva mayor ó menor, pero que no se desarrolla hasta el instante en que el muro tiende á tomar movimiento para ser derribado, es decir, cuando la acción del empuje normal sobrepuja á las demás resistencias. Nace entonces el rozamiento que podrá oponerse á la caída del muro, siempre que su intensidad sea suficiente.

Pero teniendo en cuenta el exceso de estabilidad que suele darse á toda construcción bien dispuesta, estabilidad representada por un coeficiente, cuyo valor es próximamente 2, este instante no debe tener lugar. Se concibe, por lo tanto, que en el estudio de resistencia de los muros de sostenimiento, ó cuando se quieran comparar entre sí diversos perfiles, conviene considerar estos muros en su estado ordinario de buena estabilidad, es decir, antes que el rozamiento de las tierras sobre la mampostería entre en juego.

69. Creemos haber demostrado con fundados razonamientos, que es muy conveniente prescindir del rozamiento de las tierras sobre la mamposteria en los problemas prácticos relativos á la estabilidad de los muros de sostenimiento. Hemos insistido sobre esta cuestión, no solo para justificar la omisión de este rozamiento en nuestras aplicaciones, sino también para combatir las reglas, que consideramos atrevidas, y se hallan expuestas en una memoria publicada en los anales de *Ponts et Chaussées*, 1874, por el ingeniero jefe *M. Gobin*. (*Determination precise de la stabilité des murs de soutenement.*)

El autor de esta memoria, después de tratar de demostrar que el empuje de las tierras sobre el paramento posterior de un muro es *siempre horizontal*, sea cual fuera la inclinación de este paramento, introduce en la ecuación de equilibrio de giro el momento del rozamiento de las tierras sobre la fábrica, adoptando para el ángulo de este rozamiento el del talud natural de las tierras, es decir, haciendo $\varphi'_1 = \varphi_1$.

Creemos que debe atribuirse á falta de claridad el expresar que el empuje tiene constantemente una dirección horizontal, en atención á que al introducir la acción resistente del rozamiento sobre la mampostería, que actúa en sentido contrario del momento del empuje horizonal, se admite implícitamente una resultante oblicua para el empuje de las tierras, puesto que las dos acciones proceden de una misma causa.

Adopta también el mismo autor, como elemento resistente, la cohesión de la fábrica en la base del muro, elemento de que hacen caso omiso la mayoría de los constructores. Asigna el valor de un kilogramo por centímetro cuadrado de superficie á esta fuerza, que actúa verticalmente con un brazo de palanca igual á la semi-latitud de esta base. Dicha resistencia de un kilogramo es, según el autor, la que adquiere la mampostería hidráulica al cabo de quince días.

No juzgamos prudente admitir esta resistencia en la mayoría de los casos, pues se construyen con frecuencia muros de sostenimiento empleando en su ejecución mortero de cal grasa, cuyo fraguado es muy lento, especialmente en ciertas épocas

del año, pudiendo fácilmente suceder que, antes de que el mortero endurezca por completo, sobrevenga algún accidente ó causa de aumento de empuje que comprometa la estabilidad de la obra.

Existe, además, otro inconveniente, que se opone á que pueda admitirse la cohesión de la mampostería. Sucede en muchos casos que el muro está fundado á poca profundidad, sobre un suelo que, aunque compacto, no es de roca, es decir, que se encuentra más ó menos desagregado; es evidente que existirá entonces entre la fábrica y el terreno una falta de unión, que permite al muro girar más fácilmente sobre la arista de la fundación que sobre la que se encuentra al nivel del terreno natural; no debiendo tenerse en cuenta para dificultar el primer movimiento el contraempuje de las tierras sobre el paramento anterior, en atención á que estas tierras han sido removidas con motivo del ensanche que hay que dar siempre á la caja de la fundación.

70. El autor de la memoria de que nos estamos ocupando, al aplicar la teoría á los muros con paramento interior inclinado padece, en concepto nuestro, otro error, que creemos muy oportuno señalar, tanto más, cuanto que de él participan varios constructores.

Se dice en algunas obras que tratan del asunto, que cuando el paramento interior de un muro de sostenimiento está dispuesto por retallos, en vez de formar un solo plano inclinado, entonces el peso de las tierras sobrepuestas á dichos retallos aumenta la estabilidad del muro.

Obsérvase, por de pronto, que la distinción de los dos casos parece ociosa; en uno, como en otro, las tierras han de producir el mismo efecto. Evidente es que si consideramos los retallos llenos de tierra hasta el enrase de las aristas salientes, tendremos formado un solo plano ó superficie inclinada, y nada permite admitir que las tierras que están encima actúan sobre este plano de un modo distinto que sobre un plano de mampostería; en general presentará éste numerosas asperezas, que también se rellenarán é igualarán con la tierra de una manera semejante.

Algunos autores se limitan á hacer la indicación expuesta, pero omitiendo en sus cálculos, y con razón, el peso de las tierras que se encuentran encima del paramento interior del muro. Otros, y entre éstos se halla comprendido el de la memoria citada, tienen en cuenta dicho peso, introduciendo en la ecuación de equilibrio, como acción resistente, su momento con respecto á la arista de giro.

Pero todos ellos adoptan un procedimiento que no está conforme con la teoría que hemos expuesto, y consiste en considerar como empuje de tierras el que se verificaría sobre un paramento vertical AE pasando por el pie del muro (fig. 42). Se supone entonces que este empuje, que es horizontal cuando se prescinde del rozamiento φ', se trasmite al muro por intermedio del prisma ABE. Se comprueba el equilibrio de la construcción comparando el momento del peso del muro con el momento de este empuje horizontal, haciendo intervenir en la comparación el momento del peso relativo al prisma ABE, si éste se tiene en cuenta.

71. Según la teoría que hemos desarrollado, únicamente podría admitirse semejante procedimiento si el prisma ABE estuviera formado con un material compacto sin empuje, distinto de las tierras y descansando sobre el paramento AB del muro. Sería entonces lógico calcular el empuje de las tierras sobre AE y comparar su momento con los del peso del muro y del peso del prisma ABE. Pero no sucede así en la práctica; este prisma es de igual naturaleza que el macizo general, con él forma una misma masa homogénea y constituye precisamente la parte de este macizo que tiende á desprenderse la primera para producir el empuje.

Hemos visto que cuando el terraplén termina en la horizontal de la coronación, el empuje procedía del prisma BAX limitado por la bisectriz AX del ángulo BAM que el paramento del muro forma con el talud natural de las tierras. Pero al considerar como paramento la vertical AE, se obtiene un plano de rotura dirigido según AY, bisectriz del ángulo EAM; es decir, que resulta un nuevo prisma EAY más pe-

queño que BAX; además, este último prisma descansa sobre un plano de menor inclinación con la vertical. Por este doble motivo, el empuje sobre el paramento ficticio AE es mucho menor que el empuje sobre AB. El efecto que corresponde al prisma de tierra ABE, se halla comprendido en este último empuje, y para nada hay ya que tenerlo en cuenta por separado.

Se ha querido sin duda asimilar el empuje de las tierras al que tiene lugar con los líquidos; sabemos que entonces la resultante es normal al paramento interior del muro, y que puede reemplazarse por dos componentes, una horizontal, equivalente al empuje de un líquido sobre un paramento vertical, y otra vertical, igual al peso del prisma triangular de líquido situado encima del paramento inclinado. Pero no se verifica lo mismo con las tierras; es imposible atribuirles un efecto semejante sin que se llegue á resultados inexactos.

72. Creemos oportuno hacer aun más patente, por medio de números, las diferencias de los resultados que se obtienen con la adopción de cada uno de estos distintos métodos, pues la cuestión es importante y merece apreciarse con claridad y exactitud.

Calcularemos para esto el ancho de coronación de un muro de sostenimiento, al cual daremos sucesivamente un talud exterior de 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, y para cada uno de éstos una inclinación del paramento interior variando en la misma progresión. Por medio de este ancho y teniendo en cuenta los respectivos taludes de ambos paramentos, se determinará fácilmente en cada caso el espesor medio del muro, lo que principalmente nos ha de servir para comparar los diversos sistemas de cálculo.

Al efecto, emplearemos: 1.º El método que indica la teoría, comparando el momento del peso del muro con el momento del empuje normal al paramento interior. 2.º El que se sigue al establecer la comparación del momento del mismo peso de la fábrica, con el del empuje horizontal que tendría lugar sobre un paramento ficticio vertical partiendo del pie del muro. 3.º El

El empuje horizontal tiene por brazo de palanca $\frac{H}{3}$.
La siguiente expresión da el momento del peso del muro

$$H^3\left[\left(\frac{n^2}{3}+\frac{nm}{2}+\frac{m^2}{6}\right)\delta'+\left(n+\frac{m}{2}\right)\delta' e+\frac{\delta'}{2}e^2\right]$$
$$=H^3(C+De+Ee^2).$$

El momento del triángulo de tierra sobrepuesto al paramento, tiene por valor

$$H^3\left[\left(\frac{nm}{2}+\frac{m^2}{3}\right)\delta+\frac{m\delta}{2}e\right]=H^3(C'+D'e).$$

En las tres expresiones que preceden, y por simplificar, hemos designado con las mayúsculas A, B, C, D, E, C', D', los respectivos coeficientes de las diversas potencias de e.

Podemos establecer ya las ecuaciones de equilibrio. Tendremos para el primer caso, es decir, según la teoría,

$$C+De+Ee^2=2Q'A-2Q'Be$$

$$\text{ó}\qquad e^2+\frac{D+2Q'B}{E}e=\frac{2Q'A-C}{E}.$$

Para el segundo caso con empuje horizontal

$$C+De+Ee^2=\frac{2Q'}{3}\qquad\text{ó}\qquad e^2+\frac{D}{E}e=\frac{2Q'-3C}{3E}.$$

Finalmente, para el tercero, en que se cuenta con el peso del prisma situado encima del paramento,

$$C+De+Ee^2+C'+D'e=\frac{2Q'}{3}$$

$$\text{ó}\qquad e^2+\frac{D+D'}{E}e+\frac{2Q'-3(C+C')}{3E}.$$

73. Tenemos calculadas las intensidades del empuje; dando á m, n y θ los valores que indica el cuadro que precede, y

procedimiento que resulta considerando, además de las acciones del caso que precede, la relativa al peso del prisma triangular de tierra sobrepuesto al paramento interior. Adoptaremos los mismos datos empleados ya, que son:

δ = 1.600 kil. para el peso del metro cúbico de tierra;

δ' = 2.200 kil. para el peso del metro cúbico de mampostería:

φ = 40° para el ángulo del talud natural de las tierras;

c para el coeficiente de estabilidad de giro.

El empuje sobre un paramento inclinado está dado por la expresión [14] (**37**)

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 \left[\text{tang.}\ (\beta - \theta) + \text{tang.}\ \theta\right] \frac{\text{sen.}\ (\alpha - \varphi)}{\text{sen.}\ (\beta + \varphi)},$$

expresión que se reduce á [16]

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2\ \text{tang.}^2\ \beta,$$

cuando el paramento interior es vertical, en cuyo caso $\theta = 0$.

Haciendo variar el ángulo θ, podremos formar el siguiente cuadro de empujes:

NÚMERO 4

CUADRO *de valores del empuje para diferentes inclinaciones del paramento interior.*

m = tang. θ	θ	$\beta = \frac{90 + \theta - \varphi}{2}$	Q
			k.
0	0	25°	173,95 H^2
0,1	5° 42′	27° 51′	204,60 H^2
0,2	11° 19′	30° 39′ 1/2	238,15 H^2
0,3	16° 42′	33° 21′	275,04 H^2
0,4	21° 48′	35° 54′	314,96 H^2

El brazo de palanca del empuje normal al paramento es

$$H \left[\frac{1}{3\ \text{cos.}\ \theta} - (n + m)\ \text{sen.}\ \theta - e\ \text{sen.}\ \theta\right] = H\,(A - Be).$$

ro, se observa que las diferencias no son muy considerables. Puede, pues, decirse, que atendiendo á la relación de densidades que hemos adoptado, relación que constituye un término medio bastante generalizado, si calculamos el empuje como actuando sobre el paramento vertical ficticio que arranca del pie del muro, sin tener en cuenta el prisma de tierra sobrepuesto á dicho paramento, se llega á resultados de espesores bastante aceptables, por no discrepar, de una manera que ofrezca importancia en la práctica, de los espesores teóricos.

Comparemos ahora los resultados que se obtienen al tener en cuenta el peso del prisma de tierra con los que da la teoría. Se observa desde luego para el tercer caso, una reducción de espesores bastante considerable, y tanto mayor, cuanto más inclinación ofrecen los dos paramentos. Se ve, además, que estos espesores son los mismos cuando la suma $m + n$ de las inclinaciones no varía. Así, para $n = 0$ y $m = 0,2$ se obtiene 0,148 y 0,248, que respectivamente corresponden al ancho de coronación y al ancho medio; estos mismos anchos resultan también haciendo $n = 0,1$ y $m = 0,1$. Por otro lado, se llega á 0,055 y 0,205 para los taludes $n = 0$ y $m = 0,3$, así como cuando $n = 0,1$ y $m = 0,2$. Indica esto que, bajo el punto de vista de la estabilidad, sería indiferente distribuir de una manera cualquiera, de un lado y de otro del muro, la inclinación de los dos paramentos, con tal que la suma de sus proyecciones horizontales fuese la misma.

Sabido es que el trazado del talud exterior de un muro de sostenimiento obedece á la regla de transformación de perfiles, que consiste en reemplazar el paramento vertical ó inclinado por otro con distinta inclinación, pasando por el punto del primero situado al noveno de la altura, á partir de la base. Si el sistema de cálculo referente al tercer caso fuese exacto, podría aplicarse esta misma regla al paramento interior, según se desprende de lo que antecede; el trazado de la sección de un muro de sostenimiento se reduciría entonces simplemente á darle, en la horizontal situada al noveno de la altura, á partir de abajo, un espesor igual al tercio de la misma altura, disponiendo la

haciendo además $\delta' = 2.200$, podremos obtener los valores numéricos de los coeficientes representados por mayúsculas, que son funciones de dichas cantidades. No quedará más que resolver, para cada uno de los tres casos, una ecuación numérica de segundo grado, la cual dará la latitud de coronación para una altura de muro igual á la unidad, ó sea la relación de la latitud á una altura cualquiera.

El siguiente cuadro indica los resultados obtenidos, así como también los que corresponden al ancho medio del muro. Se han formado tres grupos relativos á las tres inclinaciones de 0, 0,1 y 0,2, asignadas al paramento exterior.

NÚMERO 5

CUADRO *de anchos de coronación y de anchos medios para cada uno de los tres sistemas de cálculo.*

TALUD DE LOS PARAMENTOS.		ESPESORES SEGÚN LA TEORÍA.		ESPESORES CON EMPUJE HORIZONTAL.		ESPESORES CON EMPUJE HORIZONTAL Y PRISMA DE TIERRA.	
Exterior. *n*	Interior. *m*	De coronación.	Medios.	Coronación.	Medios.	Coronación.	Medios.
0	0	0,325	0,325	0,325	0,325	0,325	0,325
	0,1	0,281	0,331	0,269	0,319	0,237	0,287
	0,2	0,228	0,328	0,220	0,320	0,148	0,248
	0,3	0,166	0,316	0,163	0,313	0,055	0,205
	0,4	0,096	0,296	0,103	0,303	negativo.	»
0,1	0	0,230	0,280	0,230	0,280	0,230	0,280
	0,1	0,186	0,286	0,179	0,279	0,143	0,243
	0,2	0,132	0,282	0,125	0,275	0,053	0,203
	0,3	0,078	0,278	0,078	0,278	negativo.	»
0,2	0	0,145	0,245	0,145	0,245	0,145	0,245
	0,1	0,100	0,250	0,093	0,243	0,057	0,207
	0,2	0,046	0,246	0,040	0,240	negativo.	»

74. El examen de este cuadro se presta á la ssiguientes observaciones: Al comparar los espesores de coronación y medios obtenidos en el segundo caso con los relativos al prime-

inclinación de los taludes como se quisiera. Es precisamente el método que siguen algunos constructores.

Pero hemos visto que el sistema de cálculos en que se funda este método, no está conforme con la teoría; es por lo tanto, inadmisible la reducción de espesor á que con él se llega, é inadmisible también el aplicar la regla de transformación de perfiles al paramento interior. Veremos en el capítulo siguiente el procedimiento sencillo que debe seguirse para efectuar el trazado de la sección de un muro.

75. El autor de la memoria antes citada introduce en la ecuación de equilibrio y como elementos de resistencia, no solo el momento del prisma triangular de tierra sobrepuesto al paramento interior, sino también el momento del rozamiento de las tierras sobre dicho paramento, y aun más, la cohesión de la mampostería. Creemos útil hacer ver, con un ejemplo de este mismo autor, hasta qué grado de reducción de espesor le conduce la aplicación de semejante sistema.

Examina un muro de sostenimiento de 10 metros de altura (figura 43), al que fija un ancho de coronación de $0^m,58$, disponiendo verticalmente el paramento exterior y con talud de $\frac{1}{5}$ el interior. Resulta con esto un ancho de base de $2^m,58$ y un espesor medio de $1^m,58$, espesor que no llega al *sexto* de la altura del muro.

Sin embargo, con estos datos, y tomando las densidades medias y el ángulo del talud natural de las tierras que hemos empleado antes, calcula el coeficiente de estabilidad de giro, para el que halla un valor 2,25, que considera como pudiendo aceptarse perfectamente.

Por último, llega á establecer un principio y deducir una regla que, aunque pareciendo hallarse en consonancia con cierta rutina seguida por algunos constructores, está, sin embargo, en contradicción con los resultados que hemos obtenido.

Dice que el talud interior es más ventajoso que el exterior, y que en general hay que dar á los muros de sostenimiento es-

casa inclinación en el paramento visto, y concentrar la masa de la mampostería hacia las tierras.

Pero precisamente es esto lo contrario de lo que sucede adoptando nuestro método, y para convencerse de ello basta examinar el cuadro anterior, fijándose en los anchos medios. Se ve, para el primer caso, que con un mismo talud exterior estos anchos varían muy poco con la inclinación del paramento interior, y que se hallan considerablemente reducidos, dando todo el talud disponible al otro paramento, en vez de fijarlo del lado de las tierras.

En el tercer caso, si bien los anchos medios disminuyen á medida que aumenta la inclinación del paramento interior, puesto que, según hemos visto, dicho paramento obedecería á la regla de trasformación al noveno, puede, sin embargo, observarse que es casi indiferente colocar el talud por un lado ó por el otro. Es verdad que aquí hacemos abstracción del rozamiento de las tierras sobre el muro y de la cohesión de la fábrica, elementos de resistencia que utiliza M. Gobín, y que le conducen á obtener un coeficiente de estabilidad igual á 2,25 para el muro con paramento exterior vertical y con talud de $\frac{1}{5}$ al interior, mientras que solo consigue 2 para este coeficiente al cambiar de sitio los dos paramentos. Pero por lo demás, el método es análogo al del tercer caso, y por lo tanto, inadmisible.

76. Existe una nueva teoría del empuje de las tierras, que ha sido propuesta por el ingeniero inglés *M. Rankine*, y de la que diremos pocas palabras, pues no la juzgamos susceptible de poderse generalizar en la práctica, á pesar de haber sido patrocinada por algunos ingenieros distinguidos.

Parte el autor de esta teoría de la hipótesis de un macizo granuloso completamente desprovisto de cohesión, y después de varios razonamientos, llega á establecer el principio siguiente: *La resultante del empuje que produce este macizo, suponiendo que termina arriba con una superficie plana, tiene una dirección paralela á la línea de máxima pendiente de dicha superficie.*

Observaremos, por de pronto, que la hipótesis de un macizo sin cohesión no se realiza en la práctica, pues las tierras son casi siempre más ó menos arcillosas; es, por lo tanto, permitido atribuir cierta inexactitud al principio deducido de semejante hipótesis. Además, este mismo principio conduce á resultados que no consideramos admisibles. En efecto; sea ABCD (figura 44) la sección de un muro cuyo paramento interior es vertical, suponiendo que sostiene un terraplén limitado superiormente con la horizontal BM_1 de la coronación. Según el principio de Rankine y con semejante disposición de terraplén, el empuje será siempre horizontal. Pero esto no es cierto, sino en tanto que no existe rozamiento entre las tierras y el paramento interior del muro, puesto que las experiencias citadas de Ardant, de Flamant y de Baker, demuestran de un modo palpable que dicho rozamiento produce una resultante oblicua.

Si suponemos ahora que el terraplén termina con la línea inclinada BM_2, el empuje Q_2 será, según el mismo principio, paralelo á esta línea, de donde resulta que dando á la base AB del muro la suficiente latitud para contener la prolongación del empuje oblicuo Q_2, el muro será estable, aunque se construya con un material sumamente ligero. Pero esta ligereza no le permitiría resistir al empuje horizontal Q_1 procedente del terraplén ABM_1, y menos aun al empuje Q_3 á que daría lugar la terminación AM_3. De aquí se deduciría, como consecuencia, que el muro ofrece una estabilidad, tanto mayor, cuanto más carga de tierra tenga que sostener, lo que no es racional.

El procedimiento que se emplea para aplicar esta teoría á un muro con paramento interior inclinado, presenta además una nueva inexactitud. Se calcula entonces el empuje considerando que actúa sobre un paramento vertical ficticio que pasa por el pie interior del muro, haciendo entrar también en la ecuación de equilibrio el peso del prisma de tierra sobrepuesto al paramento. Hemos visto que este procedimiento no podía dar resultados admisibles. Creemos inútil insistir más sobre este asunto.

CAPÍTULO IV

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LOS MUROS DE SOSTENIMIENTO

---

77. Nos proponemos aplicar los principios y las fórmulas expuestas en el segundo capítulo: á los *muros de sostenimiento* cuya coronación se halla al nivel de las tierras; á los que presentan menos elevación que el terraplén, y que con este motivo suelen llamarse *muros de revestimiento*, y por último, á los de *contención*, destinados á servir de depósito para cierta cantidad de agua. En capítulo aparte trataremos de las grandes presas de embalse que se establecen sobre algunas corrientes de agua, ya sea para atender á las necesidades de la agricultura ó de la industria, ya para el abastecimiento de las poblaciones. Por más que estas últimas obras pertenezcan á la categoría de los muros de contención, merecen, sin embargo, estudiarse por separado, en vista de la importancia que tienen, así como por la especialidad de los cálculos á que dan lugar.

Examinaremos las distintas formas que pueden darse á cada una de las tres clases de muro mencionadas, discutiendo sus ventajas é inconvenientes; se indicarán también las modificaciones de que son susceptibles, atendiendo á las variaciones de los diversos elementos constantes ó accidentales que pueden afectar á la estabilidad de la obra, y por último, trataremos de establecer reglas y fórmulas prácticas de fácil empleo.

NÚMERO 6

CUADRO *de anchos de coronación y de anchos medios para los muros con talud.*

m	ANCHOS PARA							
	$n = 0$		$n = 0{,}1$		$n = 0{,}2$		$n = 0{,}3$	
	De coronación.	Medios.	De coronación.	Medios.	De coronación.	Medios.	De coronación.	Medios.
	m	m	m	m	m	m	m	m
0	0,325 H	0,325 H	0,230 H	0,280 H	0,145 H	0,245 H	0,068 H	0,218 H
0,1	0,281 —	0,331 —	0,186 —	0,287 —	0,100 —	0,250 —	0,021 —	0,221 —
0,2	0,228 —	0,328 —	0,132 —	0 282 —	0,046 —	0,246 —		
0,3	0,166 —	0,316 —	0,078 —	0,278 —				
0,4	0,094 —	0,296 —						

Para la formación de este último cuadro, hemos conservado los datos ya empleados, que son:

δ = 1.600 para el peso del metro cúbico de tierra;

δ' = 2.200 íd. íd. íd. de mampostería;

φ = 40° para el ángulo del talud natural de las tierras;

c = 2 para el coeficiente de estabilidad.

79. El simple examen del cuadro que antecede, permite discutir fácilmente las ventajas é inconvenientes de la mayor ó menor inclinación de los dos paramentos del muro, bajo el punto de vista de la economía de material.

Vemos, desde luego, que los espesores medios comprendidos en una misma columna vertical cambian poco, lo que quiere decir que para un mismo talud exterior el volumen del muro no varía mucho, aunque se den distintas inclinaciones al paramento interior, ó lo que es lo mismo, estas inclinaciones ejercen escasa influencia en la economía de fábrica, en tanto que se quiere conservar la misma estabilidad.

Se observa, por otro lado, que los espesores medios situa-

78. La sección transversal de los muros que vamos á estudiar en este artículo, tiene la forma de un trapecio, y como caso particular, la de un rectángulo; nos ocuparemos en él solamente de los muros con taludes, dejando para el artículo siguiente los que ofrecen desplome.

Volvamos á las fórmulas del capítulo II. La expresión general del empuje, haciendo abstracción del rozamiento de las tierras sobre la mampostería, es [14] (**37**)

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 \left[\text{tang.}\ (\beta - \theta) + \text{tan.}\ \theta \right] \frac{\text{sen.}\ (\alpha - \varphi)}{\text{sen.}\ (\beta + \varphi)}.$$

La aplicación de esta fórmula á diversas inclinaciones del paramento interior del muro, da lugar al cuadro de empujes núm. 4, ya incluído en el capítulo que precede (**72**).

El empuje normal al paramento interior tiene por brazo de palanca (**72**)

$$H \left[\frac{1}{3\ \text{cos.}\ \theta} - (n + m)\ \text{sen.}\ \theta - e\ \text{sen.}\ \theta \right] = H\,(A - Be).$$

El momento del peso del muro está expresado por

$$H^3 \left[\left(\frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6} \right) \delta' + \left(n + \frac{m}{2} \right) \delta' e + \frac{\delta'}{2} e^2 \right]$$
$$= H^3\,(C + De + Ee^2).$$

Por último, tenemos para la ecuación de equilibrio que da el ancho de coronación

$$e^2 + \frac{D + 2Q'B}{E} e = \frac{2Q'A - C}{E}.$$

Por medio de esta ecuación, puede formarse el cuadro siguiente:

dos en una misma línea horizontal decrecen de un modo notable á medida que aumenta el talud exterior. Existe, pues, gran interés en dar una fuerte inclinación al paramento opuesto á las tierras, á fin de disminuir el volumen del muro.

Las variaciones de espesor medio que resultan de las distintas inclinaciones del paramento exterior, obedecen á la ley de transformación de perfiles de que ya hemos hablado. Esta ley fija un mismo ancho á la sección, en la horizontal situada al noveno de la altura á partir de la base, para todos los muros de igual altura, estabilidad y con igual talud interior. Pero como esta regla, empleada con frecuencia, carece de exactitud matemática, creemos conveniente hacernos cargo de su grado de precisión.

80. Consideremos para esto un muro rectangular ABCD (figura 45), cuyo momento compararemos al del muro trapezoidal ABEF; designemos
por n la tangente del ángulo ETC;
por e la latitud CB del muro rectangular;
por b la de la base AF del muro ABEF.

Tomando la altura AB por unidad, el momento del rectángulo ABCD con respecto á D, será $\frac{e^2}{2}$; el momento del trapecio ABEF, referido al punto F, tendrá por valor

$$\frac{1}{2}\left(b^2 - \frac{n^2}{3}\right).$$

Para que las dos secciones correspondan á una misma estabilidad, es preciso igualar entre sí los dos momentos anteriores, de donde resulta

$$b^2 = e^2 + \frac{n^2}{3} \qquad \text{ó} \qquad b = \sqrt{e^2 + \frac{n^2}{3}}.$$

Se ve que el ancho de la nueva base depende no solo del talud n, sino también del ancho e del muro rectangular.

Haciendo $e = \frac{1}{3}$ y dando diversos valores á n, podrán calcularse los correspondientes á la base b, así como los anchos del trapecio en la horizontal situados al noveno de la altura, anchos que designaremos por e' y que están dados por la expresión

$$e' = b - \frac{n}{9}.$$

Los resultados del cálculo son como sigue:

NÚMERO 7

CUADRO *de anchos en la base y al noveno de la altura para un muro con paramento exterior inclinado, de igual estabilidad que un muro rectangular.*

Talud exterior. n	Ancho en la base. b	Ancho al noveno. e'
0,01	0,3334	0,3329
0,10	0,3382	0,3271
0,20	0,3528	0,3306
0,30	0,3757	0,3424

Según se observa, los anchos al noveno de la altura difieren poco de $\frac{1}{3}$; es de advertir, sin embargo, que aumentando la inclinación del paramento exterior, el error se hace más notable; pero dentro de los límites de talud que se emplean en la práctica, no hay inconveniente en aceptar la regla de transformación.

81. Puede calcularse siempre con toda exactitud el valor de la nueva base FA del perfil transformado que ofrece igual resis-

tencia de giro que el perfil rectangular, valiéndose de la expresión

$$b = \sqrt{e^2 + \frac{n^2}{3}} .$$

Pero esta expresión se presta á una construcción gráfica muy sencilla, por medio de la cual se evita el pequeño error de la transformación al noveno.

En efecto; adviértase que el valor de b representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos serían e y $\sqrt{\frac{n^2}{3}}$; por otra parte, este último radical es equivalente á la ordenada de un semicírculo construído sobre una longitud $n + \frac{n}{3}$ como diámetro, correspondiente á un punto de éste distante la cantidad n de su extremo; por lo tanto, si por el vértice exterior C del rectángulo trazamos CS con la inclinación que quiera darse al paramento exterior del nuevo perfil, haciendo además DL $= \frac{1}{3}$ DS, describiremos sobre SL como diámetro una semicircunferencia de círculo que cortará al paramento vertical DC en el punto T; la ordenada DT será uno de los catetos del triángulo rectángulo, el otro está dado por DA; por lo tanto, la hipotenusa AT es igual en magnitud á la base b del perfil transformado. Se llevará, pues, AT en AF y no quedará más que trazar FE paralela á SC, lo que fija la posición del nuevo paramento exterior.

Aunque este método no es muy complicado, sin embargo, en la práctica se emplea con frecuencia, para más sencillez, el procedimiento de la transformación al noveno, sobre todo, cuando el talud exterior que se quiere dar al nuevo perfil no es muy considerable.

82. Si quisiéramos ahora hacernos cargo de la influencia que ejerce el talud interior del muro sobre la estabilidad, no

habría más que comparar la sección rectangular ABCD (figura 46), con el trapecio DCEF. Designemos por
m la inclinación del paramento interior EF;
e el ancho CB del rectángulo;
b la base DF del trapecio;
tomaremos siempre la altura AB por unidad. El momento del rectángulo ABCD, con respecto al punto D, tiene por valor $\frac{e^2}{2}$; el momento del trapecio DFEC referido al mismo punto está dado por la expresión

$$\frac{b^2}{2} - \frac{m}{2}\left(b - \frac{m}{3}\right) = \frac{b^2}{2} - \frac{mb}{2} + \frac{m^2}{6}.$$

Igualando los dos momentos, resulta

$$b^2 - mb = e^2 - \frac{m^2}{3},$$

de donde

$$b = \frac{m}{2} + \sqrt{e^2 - \frac{m^2}{12}}.$$

Vemos, por este resultado, que si se hace abstracción del término negativo $\frac{m^2}{12}$ que se encuentra bajo el radical, el ancho medio del trapecio resulta igual al del rectángulo. La existencia de este término negativo es, pues, lo que modifica la igualdad; sin embargo, su influencia es muy escasa en los límites de talud práctico. En efecto; hagamos $e = \frac{1}{3}$ y $m = 0{,}3$; este valor de m constituye ya un talud muy pronunciado, tendremos

$$b = 0{,}15 + \sqrt{\frac{1}{9} - 0{,}0075} = 0{,}15 + 0{,}3219.$$

El término 0,3219 representa el ancho medio; se ve, pues, que difiere muy poco de $\frac{1}{3}$ ó de e.

Debemos con todo advertir, que los cálculos que acabamos de establecer no bastan para determinar con exactitud la influencia ejercida sobre la estabilidad de la obra por un cambio de inclinación en el paramento interior del muro, pues por más que el momento de la sección transformada sea igual al de la primitiva, es preciso aun tener en cuenta la alteración que experimenta la acción del empuje de las tierras cuando se varía el talud interior, puesto que ni la intensidad de este empuje, ni su dirección, son las mismas.

Consideramos inútil desarrollar nuevos cálculos para precisar más la cuestión; basta examinar las dimensiones medias contenidas en el cuadro de anchos que hemos calculado, para convencerse de la escasa influencia del talud interior sobre la economía de volumen, de donde resulta que siempre que se quiera modificar la inclinación del paramento interior del muro sin alterar su estabilidad, es necesario conservar la misma área en la sección, ó la misma latitud media, lo que exige que el nuevo talud pase por el punto medio del antiguo.

83. Se deduce de lo que antecede, que para proyectar un muro de sostenimiento debe empezarse por construir un rectángulo cuya latitud tenga con la altura la *relación tipo* adoptada, por ejemplo, la del tercio; luego por el punto del lado del rectángulo opuesto á las tierras, situado al noveno de esta altura á partir de la base, se trazará el paramento exterior con la inclinación que se quiera; por último, por el punto medio del otro lado del rectángulo se hará pasar el paramento interior con más ó menos talud.

La parte superior de los muros de sostenimiento exige cierta latitud para recibir las losas de coronación; se concibe, pues, que esta latitud ha de limitar la inclinación de los paramentos. Según hemos visto, la del paramento exterior es la única que produce notable economía de volumen; de aquí resulta que será conveniente disponer verticalmente la cara que se halla en contacto con las tierras, y que después de deducir del ancho superior del rectángulo tipo la cantidad necesaria para las losas, podrá disponerse de lo que queda para formar el talud exterior.

Es decir, que si ABCD (fig. 47), forma el rectángulo tipo, y si BE indica la latitud necesaria para la coronación del muro, se unirá por medio de una recta el punto E con el punto I situado al noveno de DC, con lo que se determina el paramento exterior EIF. La inclinación de este paramento será evidentemente tanto más pronunciada, cuanto mayor sea la altura del muro; teniendo por límite superior la relación existente entre el ancho del rectángulo tipo y los ocho novenos de su altura.

Con esta regla se consigue la sección de muro más económica, ó que corresponde á menor volumen de fábrica; no puede, sin embargo, adoptarse siempre, en atención á que el paramento exterior ha de tener muchas veces una inclinación impuesta por condiciones de localidad ó de estética. En este caso se empieza por trazar el paramento FE (fig. 48), con el talud asignado de antemano, haciéndole pasar por el punto I situado al noveno de DC; entonces, si después de haber llevado á partir de E la longitud EL, necesaria para las losas, quedase hasta completar el lado superior del rectángulo cierta distancia LB; indiferente sería para la estabilidad adoptar el paramento inclinado LM que pasa por el punto J, situado á mitad de la altura, ó conservar el paramento vertical BA.

Advertiremos, sin embargo, que esta última solución será más económica que la primera, que presenta una base de más latitud, y da lugar, por consiguiente, á un volumen mayor para el macizo de fundación, tanto mayor, cuanto más considerable sea la profundidad á que se halla el terreno firme. Veremos más adelante que la inclinación del paramento interior ofrece otro nuevo inconveniente; podemos, pues, establecer que, salvo algunas circunstancias especiales de localidad, es preferible disponer verticalmente el paramento interior de los muros de sostenimiento.

Esta disposición ha sido adoptada por gran número de constructores, y en algunos tratados que se ocupan del asunto, se indica como tipo de muro de sostenimiento, muy empleado en Francia para los terraplenes de las vías de comunicación, la sección de la figura 49. Se compone de un

paramento exterior con talud de $\frac{1}{10}$ y de otro vertical del lado de las tierras. El exceso de latitud de la parte superior sobre el ancho de las losas, se dispone con una ligera pendiente hacia dentro.

84. Las consideraciones que preceden resuelven, á nuestro parecer, la debatida cuestión sobre la influencia que ejerce la inclinación del paramento interior de un muro de sostenimiento con respecto á la economía de fábrica.

En una memoria inserta en el *Mémorial du Génie*, año 1848, establece M. Ardant, apoyándose en los resultados de varias experiencias, que el perfil con talud interior es el más económico; confiesa, sin embargo, que la superioridad de este perfil exige hallarse confirmada por la práctica. Igual opinión manifiesta M. Gobín, según vimos en el capítulo III.

Pero este parecer se encuentra impugnado por otros varios ingenieros, entre los que citaremos *M. Zazilli*, *annales des Ponts et Chaussées*, 1853, *murs de reservoirs*; *M. Lafont*, en la misma publicación, año 1866, *poussée des terres*; *M. Tony Fontenay*, *construction des viaducts*, y *M. Scheffler*, traducción francesa de *M. Fournié*, pág. 365. Ninguno de estos ingenieros admite la influencia del talud interior del muro sobre la economía de material, ya sea que se disponga el paramento formando un solo plano inclinado ó que se establezca por retallos. Indican, sí, como más ventajoso, el perfil en que dicho paramento está en desplome. Al tratar más lejos de la citada clase de muros, se hallará confirmada esta indicación por la teoría.

Veremos también al ocuparnos de los muros de contención, que la escasa influencia del talud aplicado al paramento interior, sobre la economía de fábrica, sólo tiene lugar para el sostenimiento de las tierras, y que tratándose de una carga de agua, se aumenta la estabilidad del muro á medida que se da mayor inclinación al paramento en contacto con el líquido.

85. Hemos dicho en el capítulo III, que si pudiera utilizarse como acción resistente el peso del prisma triangular de tierra sobrepuesto al paramento interior de un muro de soste-

nimiento, el trazado de este paramento obedecería también á la regla de transformación al noveno; de manera que suponiendo fijado de antemano el talud exterior, se obtendría la sección más económica dando al otro paramento toda la inclinación disponible, teniendo en cuenta el ancho que hay que dejar arriba para la coronación. Pero se ha demostrado que este método era inadmisible por disminuir la resistencia del muro, y que el paramento del lado de las tierras debía pasar por el punto medio de la vertical perteneciente al rectángulo tipo, con lo que ya no se reduce tanto la sección. Pero es evidente que si el talud exterior no está subordinado á ninguna condición, se obtendrá la misma máxima economía dando á este talud toda la inclinación que permitan las losas de coronación, dejando al mismo tiempo vertical el paramento interior.

86. Por lo que antecede, quedan determinadas las dimensiones que hay que dar á un muro de sostenimiento para que resista convenientemente al movimiento de giro que tienden á comunicarle las tierras. Según se ha dicho, fijando á un tercio de la altura el ancho de la sección rectangular tipo, se obtenía la debida estabilidad en los casos más ordinarios; se han expuesto además los procedimientos que deben emplearse para reemplazar los paramentos verticales de esta sección por paramentos inclinados, sin alterar dicha estabilidad. Conviene que examinemos ahora la resistencia que este muro ofrece á los otros dos movimientos de deslizamiento y de aplastamiento.

La primera de estas dos resistencias depende, á igualdad de rozamiento, del peso de la fábrica; por lo tanto, debe disminuir si damos al muro un talud exterior, puesto que con él decrecen el volumen y el peso; con respecto á la inclinación del paramento interior, diremos que también debilita la misma resistencia, pues aunque el peso del muro no varía haciendo pasar este paramento por el punto medio del lado del rectángulo tipo, aumenta mucho el empuje de las tierras que ejercen una notable influencia, por más que su inclinación sobre la horizontal da lugar á una componente vertical que se agrega al peso del muro.

La ecuación de equilibrio hallada en el segundo capítulo (**48**), es

$$Q \cos. \theta = f (P + Q \operatorname{sen.} \theta),$$

de donde se deduce

$$f = \frac{Q \cos. \theta}{P + Q \operatorname{sen.} \theta} .$$

El cuadro núm. 4 (**72**) indica los valores del empuje para distintas inclinaciones del paramento interior del muro; será fácil determinar el peso P de la fábrica para estas mismas inclinaciones y para diversos valores del talud exterior. Con estos datos podrá calcularse el siguiente cuadro:

NÚMERO 8

CUADRO *de relaciones entre el empuje horizontal y la carga.*

$m = \text{tang. } \theta$	VALORES DE f PARA			
	$n = 0$	$n = 0{,}1$	$n = 0{,}2$	$n = 0{,}3$
0	0,24	0,28	0,32	0,36
0,1	0,27	0,31	0,35	0,40
0,2	0,30	0,35	0,39	
0,3	0,34	0,38		
0,4	0,38			

Los resultados de este cuadro confirman lo que hemos dicho sobre la influencia creciente de los dos taludes. Puede observarse que para una misma suma $m + n$, se obtiene aproximadamente el mismo valor de f. Al comparar este cuadro con el que se dió en el primer capítulo (**4**) y que es relativo á los coeficientes de resbalamiento de diversas sustancias en contacto, se ve que en general, y para los casos más usuales de la práctica, no es de temer el movimiento de deslizamiento, puesto que estos coeficientes son superiores á los valores de f que

acabamos de calcular. Solo en el caso en que el muro descansa sobre un terreno arcilloso y húmedo, es cuando habría motivo para tomar algunas precauciones, á fin de impedir este movimiento; pero debemos aun advertir, que al fijar los resultados del cuadro que antecede no se ha tenido en cuenta el peso del macizo de fundación que contribuye á aumentar la estabilidad, y que para un terreno semejante puede tener cierta importancia. Será, pues, necesario, en rigor, agregar este peso al del muro para formar el valor de P de la fórmula anterior y deducir luego el de f relativo á la base del cimiento.

87. Ocupémonos ahora del movimiento de aplastamiento.

La presión unitaria máxima que tiene lugar en la base del muro depende, como sabemos, no sólo de la intensidad de las fuerzas verticales que obran sobre ella, sino también de la posición de su resultante. El empuje de las tierras, combinado con el peso del muro, produce una resultante oblicua dirigida hacia la parte anterior; de donde se deduce que el talud exterior debe favorecer la resistencia de aplastamiento, puesto que aleja el punto de giro, en el que se verifica la mayor presión, del punto de paso de la resultante sobre la base.

La distancia de este punto de paso á la arista exterior está determinada (**55**) por la expresión [44]

$$d = \frac{\mathcal{M} \,.\, \Sigma P - \mathcal{M}\, Q_h}{\Sigma P},$$

en la que ΣP representa la suma de las fuerzas verticales, suma que en el caso que examinamos se compone del peso de la fábrica y de la componente vertical Q sen. θ del empuje. Poniendo los valores de los momentos y el de la suma de las acciones verticales, se obtiene

$$d = \frac{\delta'\left[\frac{e^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2}\right)e + \frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6}\right] + Q'\text{sen.}\,\theta\left(n + e + \frac{2}{3}m\right) - \frac{Q'\cos.\theta}{3}}{\delta'\left(\frac{n}{2} + e + \frac{m}{2}\right) + Q'\ \text{sen.}\ \theta} \qquad \text{XII.}$$

Conocemos los valores de Q′ para varias inclinaciones del paramento interior (cuadro núm. 4); haciendo variar también el talud exterior podremos, mediante la expresión que antecede y el estado de anchos de coronación, calcular el cuadro siguiente:

NÚMERO 9

CUADRO *de distancias del punto de paso de la resultante á la arista de giro, para diversos taludes.*

m = tang. θ	VALORES DE LAS DISTANCIAS d PARA			
	$n = 0$	$n = 0,1$	$n = 0,2$	$n = 0,3$
0	0,081 H	0,094 H	0,107 H	0,120 H
0,1	0,082 –	0,093 –	0,107 –	0,121 –
0,2	0,079 –	0,091 –	0,102 –	
0,3	0,076 –	0,084 –		
0,4	0,072 –			

Todas las distancias obtenidas para d son inferiores al tercio del ancho de la base. A fin de cerciorarse de esto, no hay más que tener presente que este ancho es igual á $(n + m + e) \times H$; deberá, pues, calcularse la presión máxima unitaria por medio de la segunda de las dos fórmulas del trapecio relativas á una sección rectangular, que es

$$\rho = \frac{2}{3} \frac{P}{d},$$

en la que P representa la suma de las fuerzas verticales, ó ΣP.

El siguiente cuadro contiene las presiones y también los pesos:

NÚMERO 10

CUADRO *de presiones unitarias máximas para distintos taludes de los paramentos.*

m	$n = 0$		$n = 0{,}1$		$n = 0{,}2$		$n = 0{,}3$	
	ΣP	ρ	ΣP	ρ	ΣP	ρ	ΣP	ρ
	K.	K.	K.	K.	K.	K.	K.	K.
0	715,0 H^2	0,588 H	616,0 H^2	0,436 H	539,0 H^2	0,326 H	479,6 H^2	0,266 H
0,1	748,0 —	0,608 —	651,4 —	0,466 —	570,0 —	0,354 —	518,2 —	0,278 —
0,2	768,2 —	0,648 —	667,0 —	0,498 —	588,0 —	0,384 —		
0,3	774,2 —	0,678 —	690,6 —	0,548 —				
0,4	768,0 —	0,710 —						

88. Los valores de ρ que anteceden y que están referidos al centímetro cuadrado, justifican lo que decíamos con respecto al paramento exterior. La presión unitaria máxima es tanto más pequeña, cuanto más pronunciado es el talud de este paramento. Lo contrario sucede con el paramento interior, pues el examen de una misma columna vertical del cuadro demuestra que la presión máxima en la arista de giro aumenta con la inclinación de este paramento.

Esta última observación constituye el nuevo motivo de que hablamos (**83**), al justificar la preferencia que merece la disposición vertical para el paramento del muro que se halla en contacto con las tierras.

Las presiones unitarias máximas del cuadro están representadas, en cada disposición de los paramentos, por una fracción multiplicada por la altura. Estas presiones crecen, pues, proporcionalmente á esta altura, y conviene hacernos cargo del grado de importancia que pueden adquirir en la práctica.

Cuando se construye un macizo de fábrica con esmero y empleando en su ejecución mortero hidráulico, es muy frecuente admitir la cantidad de 8 kilogramos para la presión máxima por centímetro cuadrado á que conviene someter este macizo, por más que algunas antiguas construcciones resisten presiones superiores, llegando hasta 14 kilogramos. Pero cuando se trata de muros de sostenimiento con mortero común, y sobre todo si no hay confianza en la perfección de la mano de obra, es prudente no pasar de 6 kilogramos.

Según el cuadro que antecede, disponiendo verticalmente el paramento interior, lo que constituye la disposición más favorable, bajo el punto de vista de la compresión, si al mismo tiempo no se asigna talud alguno al paramento opuesto, podrá darse al muro una altura máxima de 10 metros, sin pasar notablemente de la carga de 6 kilogramos por centímetro cuadrado; con talud exterior de 0,1, se llegará hasta 14 metros de altura con las mismas condiciones de presión. Para alturas más considerables, hay que aumentar la inclinación del talud exterior ó el espesor del macizo, ó bien adoptar otras formas más económicas, de que hablaremos más lejos.

89. No perdiendo de vista estas últimas consideraciones, puede decirse que en la mayoría de los casos, cuando se fijan las dimensiones de un muro de sostenimiento partiendo de la sección rectangular tipo, cuya latitud es el tercio de la altura, sección que puede trasformarse por las reglas establecidas, se obtiene una conveniente estabilidad con respecto á cada uno de los tres movimientos de giro, de deslizamiento, y de aplastamiento.

Es oportuno, sin embargo, advertir que la relación del tercio, generalmente adoptada por los constructores, y que hemos deducido también de nuestros cálculos, parte de los valores medios que con más frecuencia se observan en la práctica, para la densidad de las tierras y de la fábrica, así como para el ángulo del talud natural de las tierras. Tampoco se ha tenido presente en dichos cálculos el efecto que pueden producir las sobrecargas fijas ó accidentales obrando sobre el terraplén con

más ó menos intensidad. Conviene, pues, que examinemos si en ciertos casos no deberá modificarse esta relación del tercio, ó las reglas establecidas, teniendo para ello en cuenta la influencia de estos elementos variables.

90. Empezaremos por las densidades. Si en la expresión [38] (**51**) relativa al caso de los dos paramentos verticales con terraplén á nivel de la coronación, hacemos $c = 2$, se obtiene para el ancho del muro rectangular

$$e = \text{tang. } \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} .$$

lo que indica que este ancho es proporcional á la raíz cuadrada de la relación existente entre las densidades de la tierra y de la mampostería.

En muchos casos, el ingeniero que tiene á su cargo el proyecto de una construcción, ya sea por falta de tiempo, ya por otros motivos, no suele hacer experiencias sobre la naturaleza de los materiales que deben emplearse. Se contenta, por lo regular, con adoptar términos medios análogos á los que hemos admitido en nuestros cálculos de aplicación. Pero al ejecutar los trabajos podrán presentarse valores especiales notablemente diferentes de estos términos medios, lo que exigiría modificar las dimensiones del proyecto.

Hemos asignado á la relación de densidades la cantidad $\frac{1.600}{2.200}$ ó $\frac{8}{11}$, cuya raíz cuadrada es 0,8528; si mediante las experiencias que se hicieran con los materiables disponibles se llegase á una nueva relación, que llamaremos s, tendríamos para la nueva latitud e' de la sección rectangular tipo

$$e' = e \frac{\sqrt{s}}{0,8528} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{s}}{0,8528} .$$

Presentaremos un ejemplo. Pueden encontrarse tierras duras con peso de 1.900 kilogramos por metro cúbico; si al mismo

tiempo se construye el muro con mampostería pesando 1.700 kilogramos por igual unidad, como sucede con algunas fábricas de ladrillo, la relación de densidades se convierte en

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{1.900}{1.700} = 1{,}176,$$

cantidad cuya raíz cuadrada es 1,057. Admitiendo la invariabilidad del ángulo β, el nuevo ancho tipo sería

$$e' = \frac{1}{3} \times \frac{1{,}057}{0{,}8528} = 0{,}413;$$

lo que da lugar á un aumento de 24 por 100 sobre 0,333. Tendríamos, al contrario, una disminución empleando tierras ligeras y mampostería de gran densidad.

91. Ocupémonos ahora del ángulo de rozamiento de las tierras, que hemos designado por φ.

La misma expresión de e indica que esta latitud es proporcional á la tangente trigonométrica del ángulo β, cuyo valor es

$$\beta = \frac{90^\circ - \varphi}{2} = 45^\circ - \frac{\varphi}{2};$$

este ángulo, y por lo tanto, su tangente, crecen á medida que φ disminuye. Si admitimos tierras arenosas cuyo coeficiente de rozamiento corresponde á $\varphi = 32^\circ$, lo que da para las mismas $\beta = 29^\circ$; como en nuestros cálculos hemos partido de $\varphi = 40^\circ$ ó sea de $\beta = 25^\circ$, resultará para el nuevo ancho tipo

$$e' = \frac{1}{3} \times \frac{\text{tang. } 39^\circ}{\text{tang. } 25^\circ} = \frac{1}{3} \times \frac{0{,}55431}{0{,}46631} = 0{,}396,$$

cantidad que constituye para este ancho próximamente los dos quintos de la altura del muro.

92. Pero el caso que estamos examinando, relativo al ángu-

lo de rozamiento de las tierras, puede llegar á adquirir una importancia mucho más atendible aun, pues no solo hay que tener presentes los distintos valores de este ángulo, según la naturaleza de las tierras en su estado normal, sino también las modificaciones accidentales que estos valores experimenten, á consecuencia de un reblandecimiento producido por las lluvias ó infiltraciones de manantiales. Puede ser tal este reblandecimiento, que haga descender el ángulo φ á un valor muy inferior al que admiten las tierras en su estado general, y dé lugar á un aumento considerable de empuje al que no resista el muro.

Causas de esta naturaleza han ocasionado muchas veces la ruina de algunos muros de sostenimiento, y creemos muy importante llamar la atención de los constructores sobre este hecho. El siguiente ejemplo hará resaltar más el resultado de la modificación producida en el ángulo de rozamiento de las tierras.

Supongamos que el muro se halla establecido al pie y á lo largo de una ladera, según indica la fig. 50. Adóptase para el muro la forma rectangular con una altura de 9 metros; haremos, pues,

$$AD = \frac{1}{3}\,AB = 3^{\text{ms.}},\ \delta = 1.600^{\text{k.}},\ \delta' = 2.200^{\text{k.}},$$

$$\varphi = 40^{\circ} \text{ y } \beta = 25^{\circ}.$$

En estas condiciones ofrece la fábrica una resistencia al giro doble de la acción que ejercen las tierras, resistencia dada por el momento del peso del muro con respecto á la arista exterior D de la base, y cuyo valor es

$$2.200 \times \frac{3^2 \times 9}{2} = 89.100 \text{ kilogramos.}$$

Puede muy bien admitirse que las aguas de lluvia procedentes de la parte superior de la ladera, se reunen al pié F del terraplén, produciendo una corriente de cierta importancia;

si entonces este terraplén se encuentra mal apisonado y contiene en su base grandes terrones, que no han tenido tiempo de deshacerse con el asiento natural, es evidente que la introducción del agua debajo del terraplén tendrá forzosamente lugar, formándose allí una capa cenagosa más ó menos flúida, que disminuirá considerablemente el rozamiento de las tierras sobre el terreno de la ladera. En este caso, el prisma de máximo empuje no será ya el que tiene por sección ABX, cuyo lado AX forma con la vertical un ángulo de 25°, sino todo el terraplén ABEF.

No creemos pecar de exagerados si admitimos que con semejante penetración de agua el coeficiente de rozamiento es susceptible de descender hasta 0,25, lo que corresponde á un ángulo de 14°3′ para el valor de φ. Supongamos, además, que la inclinación de la ladera con el horizonte es de 35° 51′; tendremos ángulo FAM $= \alpha - \varphi = 21° 48'$. Daremos á la plataforma CE una latitud de 8 metros, con lo que resultará para el área de la sección ABEF la cantidad de 46,26 metros cuadrados, y para el peso del prisma de empuje 74.016 kilogramos por metro lineal de muro.

Sustituyendo estos valores en la expresión [10] del empuje (**35**)

$$Q = P \frac{\text{sen.}\ (\alpha - \varphi)}{\text{sen.}\ (\beta + \varphi)},$$

y advirtiendo que los ángulos $\alpha - \varphi$ y $\beta + \varphi$ son complementarios, resulta

$$Q = P\ \text{tang.}\ (\alpha - \varphi) = 74.016 \times 0,400 = 29.606 \text{ kilog.}$$

Este empuje, multiplicado por su brazo de palanca $\frac{H}{3} = 3$ metros, da un momento de 88.818 km., es decir, casi el mismo que el momento del peso de la fábrica. Puede, pues, sobrevenir la caída del muro con la menor conmoción ó con el menor aumento de empuje.

Si quisiéramos conocer el ancho que habría que dar al muro para resistir al empuje con un coeficiente de estabilidad igual á 2, estableceríamos la ecuación

$$\frac{\delta'}{2} \times e^2H^3 = 11.000 \times e^2 \times 9^3 = 2 \times 88.818;$$

de donde se deduce $e = 0,47$.

No queremos decir con esto que en la práctica haya que dar á un muro de sostenimiento situado en semejantes condiciones un espesor igual á 0,47 de la altura; pero los resultados obtenidos demuestran que en este caso es indispensable sanear el terreno, abriendo en la ladera cunetas que den fácil salida á las aguas de lluvia, é impidan su introducción debajo del terraplén. Esta operación es tanto más necesaria, cuanto más reciente sea la fábrica del muro y menos apisonadas se hallen las tierras.

93. Advertiremos de paso que para calcular el empuje del prisma ABEF sobre el muro, nos hemos valido de la expresión de Q [10] que deriva de la análoga [8], al prescindir del rozamiento de las tierras sobre el paramento interior. Estas dos fórmulas son las únicas aplicables al caso que se considera; determinan la intensidad del empuje de un prisma de tierra que resbala sobre un plano cualquiera, mientras que la fórmula [9] (**27**) y todas las que de ella se deducen, suponen que el plano de rotura del prisma es el que produce el máximo empuje de un macizo homogéneo. Pero la capa reblandecida que existe en la base del terraplén tomado como ejemplo, destruye la homogeneidad, obligando á todo el macizo á resbalar sobre el terreno natural; sin la existencia de esta capa el prisma que tiende á desprenderse para producir el máximo empuje lo verificaría, como hemos visto, según el plano bisector del ángulo formado por el paramento interior del muro con el talud natural de las tierras.

94. Estudiemos las modificaciones que deben introducirse en las reglas anteriormente establecidas, para fijar las dimensiones de un muro de sostenimiento, cuando el terraplén, que

supondremos siempre hallarse terminado horizontalmente en la parte superior, sostiene sobrecargas.

Serán éstas fijas ó accidentales. Las últimas pueden proceder de los vehículos de trasporte; las primeras estarán formadas, por ejemplo, por el peso del balasto y de la vía en los caminos de hierro. Muy difícil es, por no decir imposible, conocer el efecto producido sobre un muro de sostenimiento por una sobrecarga aislada, á causa de los materiales intermedios que la trasmiten; así es que nos limitaremos á suponer que todo el peso es fijo y uniformemente distribuído sobre el terraplén, lo que permite representarlo por una capa de tierra de espesor constante. Es además el procedimiento que siguen los constructores.

El coeficiente de estabilidad de un muro rectangular, cuyo espesor corresponde al tercio de la altura es, según los datos medios admitidos y la misma expresión núm. 38,

$$c = 3 \frac{\delta' e^2}{\delta \operatorname{tang.}^2 \beta} = 2{,}108.$$

Este coeficiente supera en algún tanto á 2, pues para este valor el grueso del muro no ha de ser más que 0,325, en vez de $\frac{1}{3}$, como puede verse en el cuadro de anchos (**78**).

La expresión del momento referente al peso del muro, tiene la forma

$$\mathcal{M} . \mathrm{P} = \frac{\delta'}{2} e^2 \mathrm{H}^3.$$

El momento del empuje con una sobrecarga de tierra de una altura h, es

$$\mathcal{M}\, \mathrm{Q} = \frac{\delta}{6} \operatorname{tang.}^2 \beta\, \mathrm{H}^2 (\mathrm{H} + 3h).$$

Este último momento se obtiene multiplicando la expresión del

empuje [24] (**41**), $Q = \delta H \left(\frac{H}{2} + h\right) \text{tang.}^2 \beta$, por su brazo de palanca hallado un poco más lejos (**42**), que es

$$AR = \frac{1}{3} H \frac{H + 3h}{H + 2h}.$$

Designando por c' el nuevo coeficiente de estabilidad, es decir, el referente al terraplén con sobrecarga, se tiene

$$c' = \frac{\mathcal{M}P}{\mathcal{M}Q} = 3 \frac{\delta' e^2}{\delta \text{ tang.}^2 \beta} \times \frac{H}{H + 3h} = 2{,}108 \times \frac{H}{H + 3h},$$

Admitiremos una sobrecarga formada por una capa de tierra de un metro de espesor, ó lo que es lo mismo, haremos $h = 1$. Equivale esto á suponer un peso de 1.600 kilogramos por metro cuadrado de explanación; lo que nada tiene de exagerado para un camino de hierro, contando con los pesos del balasto, vía y vehículos. Con dicha sobrecarga y valiéndonos de la anterior expresión de c', será fácil calcular los nuevos coeficientes de estabilidad correspondientes á distintas alturas de muro, coeficientes que se hallan consignados en el siguiente cuadro:

NÚMERO 11

CUADRO *de los coeficientes de estabilidad de un muro rectangular, cuyo espesor es el tercio de la altura, con sobrecarga de un metro en el terraplén.*

H	c'	H	c'
1 m.	0,527	12 m.	1,686
4 »	1,204	16 »	1,775
8 »	1,533	20 »	1,833

La altura de muro que corresponde al equilibrio estricto se deduce de la fórmula anterior, haciendo en ella $c' = 1, h = 1$, y resulta

$$H = \frac{3h}{2,108 - 1} = 2^{m},707.$$

Para alturas inferiores á esta última cifra, el momento del empuje supera al del peso del muro.

Los resultados del cuadro que precede ponen de manifiesto la gran influencia ejercida por la sobrecarga de tierra de un metro sobre la estabilidad. Esta influencia disminuye á medida que aumenta la altura del muro; se hace, sin embargo, sentir bastante para alturas medias, pero es sobre todo para las pequeñas cuando adquiere gran importancia; así es que en la práctica se acostumbra á recrecer el espesor que resulta de la regla del tercio siempre que el muro tiene escasa elevación y se halla sometido á fuertes sobrecargas.

95. Tratemos de averiguar qué modificación convendría introducir en esta regla, con el fin de conseguir la conveniente estabilidad para cualquiera altura de muro, teniendo siempre en cuenta las sobrecargas.

Ocurre, por de pronto, fijar el espesor tomando el tercio de la suma que resulta agregando á la altura del muro la de la sobrecarga. Veamos qué grado de estabilidad se consigue mediante este procedimiento.

Recordaremos que el momento del empuje con sobrecarga tiene por expresión (**94**)

$$\mathcal{M}\, Q = \frac{\delta}{6} \text{tang.}^2 \beta\, H^2 (H + 3h);$$

el momento del muro al que se da un espesor $\frac{1}{3}(H + h)$, será

$$\mathcal{M}\, P = \frac{\delta'}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 (H + h)^2 H;$$

y tendremos para el nuevo coeficiente de estabilidad

$$c'' = 3\frac{\delta'}{\delta} \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 (H + h)^2}{H(H + 3h)\tan^2 \beta}.$$

Aplicando esta fórmula á diferentes valores de H, después de hacer $h = 1$, $\delta = 1.600$ y $\delta' = 2.200$, podremos formar el siguiente cuadro:

NÚMERO 12

CUADRO *de los coeficientes de estabilidad de un muro, al que se da un espesor igual al tercio de la altura aumentada con la que corresponde á la sobrecarga.*

H	c''	H	c''
1 m.	2,108	12 m.	1,979
4 »	1,882	16 »	2,004
8 »	1,940	20 »	2,021

Estos coeficientes de estabilidad pueden perfectamente admitirse, pues las disminuciones que indican algunos, comparándolas con el valor 2, no tienen importancia en la práctica. Es, pues, aplicable la regla de tomar el tercio de la altura del muro sumada con la de la sobrecarga de tierra.

96. Según hemos visto, la escasa importancia de las reducciones del coeficiente de estabilidad, permite aplicar sin inconveniente el método expuesto para tener en cuenta la sobrecarga. Hemos fijado la altura de la capa de tierra que la representa en un metro, cuando se considera un terraplén de una vía férrea; tratándose de una carretera, se reducirá esta altura á la mitad, es decir, que haremos $h = 0^m,50$. Pudiera parecer á primera vista algo exagerada esta altura, teniendo en cuenta la

relación de las sobrecargas que obran sobre el terraplén en uno y en otro caso, y admitiendo un metro para el espesor relativo al primero de ellos. Debemos, sin embargo, observar que los carros de transporte, que principalmente componen la sobrecarga en las carreteras, pueden acercarse mucho al muro, y producir sobre éste un efecto relativamente mayor que los vehículos de un ferrocarril, cuya posición no es susceptible de cambiar en sentido trasversal.

Podemos, pues, establecer las siguientes fórmulas para fijar el espesor de un muro rectangular con sobrecarga

para un ferrocarril $e = \frac{1}{3}(\mathrm{H} + 1) = \frac{1}{3}\mathrm{H} + 0^{\mathrm{m}},33$ [45]

para una carretera $e = \frac{1}{3}(\mathrm{H} + 0,50) = \frac{1}{3}\mathrm{H} + 0^{\mathrm{m}},16.$ [46]

Algunos constructores adoptan, para el ancho tipo de un muro rectangular, los tres décimos de la altura en vez del tercio. Esta relación es también aceptable; todo dependerá de los valores de las densidades, del ángulo de resbalamiento de las tierras y también del coeficiente de estabilidad de que se quiera partir. Hemos indicado para este coeficiente el valor 2 como un término medio; pero puede hacérsele variar según las circunstancias, como por ejemplo, según la mayor ó menor confianza que se tenga en la buena clase de los materiales componentes de la fábrica y en la perfección de la mano de obra, y teniendo también en cuenta las causas más ó menos probables susceptibles de producir un aumento de empuje. Veremos que en muchos casos hay que forzar bastante este coeficiente, para evitar que resulte una presión unitaria demasiado considerable en la base del macizo de mampostería.

Adviértese que la expresión (**90**)

$$e = \text{tang. } \beta \sqrt{\frac{c}{3}} \sqrt{\frac{\delta}{\delta'}},$$

indica que el ancho tipo es proporcional á la raíz cuadrada del

coeficiente de estabilidad; así es que al adoptar para el ancho la relación 0,3, á la par que conservamos los mismos valores para las densidades y para el ángulo del talud natural de las tierras, obtendremos un nuevo coeficiente

$$c' = 2 \times \frac{(0,3)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1,62,$$

que ofrece una reducción bastante importante.

RESUMEN DE LOS MUROS DE SOSTENIMIENTO CON TALUDES Y REGLAS PRÁCTICAS.

97. Resumiremos los resultados de este artículo estableciendo las siguientes reglas:

1.ª Para proyectar un muro de sostenimiento con terraplén terminado superiormente según la horizontal de la coronación, debe empezarse por fijar la relación tipo del ancho á la altura de la sección rectangular. El tipo de $\frac{1}{3}$ parte de una relación $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{8}{11}$ para las densidades, de un ángulo de rozamiento de las tierras cuyo valor sea de 40°, y por último, de un coeficiente de estabilidad igual á 2.

Si por medio de experiencias se han hallado nuevos valores para δ, δ' y φ, y que además se quiere adoptar un nuevo coeficiente de estabilidad c, tendremos para la relación tipo del ancho

$$e = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}}}{\sqrt{\frac{8}{11}}} \times \frac{\text{tang. } \beta}{\text{tang. } 25^\circ} \times \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}};$$

recordando que $\beta = \frac{90 - \varphi}{2}$.

A falta de experiencias, se admite generalmente la relación del tercio.

2.ª Se multiplicará esta relación tipo por la altura del muro aumentada con la sobrecarga, tomando para ésta un metro si se trata de un terraplén para ferrocarril, y $0^m,50$ para una carretera. El producto, que designaremos por E, será el ancho del muro rectangular.

3.ª Con este ancho y con la altura se construirá el rectángulo que ha de servir para trazar la sección definitiva del muro. Al efecto, no habrá más que hacer pasar el paramento exterior por el punto del lado análogo del rectángulo, situado al noveno de la altura, y el paramento interior por el punto medio del otro lado. Estos dos paramentos podrán tener las inclinaciones que se quiera, atendiendo, sin embargo, á la necesidad de dejar en la parte superior del muro cierto ancho para sentar las losas de coronación, ancho que no suele ser inferior á $0^m,60$.

De este trazado, y designando por n el talud exterior, por m el interior, por e_c, e_b, e_m, las respectivas relaciones con la altura de los anchos de coronación, de base, medio, y admitiendo $\frac{1}{3}$ para la relación del ancho del rectángulo tipo á la citada altura, se deduce

Ancho de coronación $$e_c = \frac{1}{3} - \frac{8}{9} n - \frac{1}{2} m \qquad [47]$$

Ancho en la base $$e_b = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} n + \frac{1}{2} m \qquad [48]$$

Ancho medio $$e_m = \frac{1}{3} - \frac{7}{18} n. \qquad [49]$$

Si el muro tiene uno de sus paramentos vertical, se hará $n = 0$ si se trata del exterior, ó $m = 0$ cuando sea el interior, y las fórmulas modificadas darán siempre los tres anchos arriba indicados.

4.ª La inclinación del paramento opuesto á las tierras da

lugar á una economía de fábrica para una misma estabilidad de giro, aumenta la resistencia al aplastamiento, si bien disminuye al mismo tiempo la de deslizamiento, pero entre límites de escasa importancia en la práctica.

El talud interior no proporciona disminución de volumen en el muro; aumenta, por el contrario, el macizo de fundaciones, y coloca la construcción en peores condiciones de resistencia, bajo el punto de vista de los dos movimientos de deslizamiento y de aplastamiento.

Se deduce de estas dos últimas observaciones, que conviene disponer verticalmente el paramento interior del muro, y dar al exterior todo el talud que quede disponible, después de haber fijado el ancho de coronación necesario. Sin embargo, en algunos casos ciertas condiciones especiales, á que haya que atender, podrán exigir la reducción del talud exterior, ó motivar alguna inclinación para el paramento opuesto.

98. Terminaremos este artículo con algunas observaciones importantes.

Hemos tenido ocasión de examinar varios proyectos de vías de comunicación en las que se propone un solo tipo de muro de sostenimiento aplicable á cualquier altura, es decir, que la sección presenta cierto ancho de coronación, un talud exterior, y otro interior que por lo regular se establece con retallos. Pero según hemos visto (**78**), no variando la inclinación de los dos paramentos, y para una misma estabilidad de giro, la latitud de coronación debe ser proporcional á la altura del muro, puesto que es igual al producto eH; de aquí resulta que al adoptar un perfil único se disminuye forzosamente esta estabilidad á medida que aumenta la altura, y podrá suceder que llegue á ser insuficiente para que el muro resista como es debido al empuje de las tierras.

Aclararemos esto con el examen del perfil (fig. 51), que hemos visto empleado. Se compone de un ancho de coronación de $0^{m},60$, un talud exterior con inclinación de $\frac{1}{10}$, y por último, de un paramento interior con retallos que presentan una

inclinación general de $\frac{1}{5}$, según indica la línea de puntos. Si trasformamos este perfil en otro de igual resistencia cuyos paramentos sean verticales, aplicando al efecto las reglas que hemos establecido, reglas que consisten en hacer girar el paramento exterior por el punto situado al noveno de la altura, y hacer girar asimismo el interior por su punto medio, obtendremos una sección rectangular, cuyo ancho se hallará con la altura en una relación tanto menor, cuanta mayor elevación presente el muro.

Se podrá también calcular esta relación aplicando la siguiente fórmula, que se deduce fácilmente de las reglas de trasformación,

$$e = \frac{0{,}60 + \frac{8}{90} H + \frac{1}{10} H}{H} = \frac{0{,}60}{H} + \frac{17}{90};$$

de la que resulta

para H = 5 metros ..... $e = 0{,}309$
para H = 10 » ..... $e = 0{,}249$
para H = 20 » ..... $e = 0{,}219$.

No puede, pues, admitirse la aplicación de un mismo perfil á todas las alturas, puesto que la latitud del rectángulo tipo, y por lo tanto, el coeficiente de estabilidad, pueden descender á una cantidad escasa para que el muro resista debidamente al empuje de las tierras, siendo preciso aumentar el ancho de coronación para grandes alturas.

Hemos visto que convenía disponer verticalmente el paramento en contacto con el terraplén; si se acepta esta disposición no hay más que fijar en el proyecto la inclinación del talud exterior y especificar además que el ancho del muro al noveno de la altura es, por ejemplo, el tercio de la misma. Con esto quedan bien definidas las dimensiones de este muro en todos los casos sin necesidad de perfil, obteniéndose siempre la misma estabilidad. Los anchos de coronación, así como los volúmenes

de mampostería, aumentarán con la altura, pudiendo llegar á ser mayores que los que corresponderían al perfil de la figura 51; pero puede muy bien evitarse el aumento de volumen, dando mayor inclinación al talud exterior; por ejemplo, considerando una altura de 10 metros y el mismo ancho de coronación de 0,60, si acumulamos del lado exterior los dos taludes de $\frac{1}{10}$ y de $\frac{1}{5}$, lo que da un talud de 0,3, no se habrá alterado el area de la sección que examinamos, obteniéndose una latitud al noveno de 0,326 de la altura, latitud que es la del perfil rectangular de igual resistencia. Con la misma disposición y para una altura de 20 metros, se llega aun á un ancho al noveno de 0,296, que en varios casos podría aceptarse.

99. Muchos ingenieros no suelen pasar de $\frac{1}{10}$ para la inclinación del paramento exterior de los muros construídos con mezcla; este talud se adopta con frecuencia, sin duda por simple rutina, pues no conocemos ningún motivo fundado con que justificar esta costumbre. Desde el momento en que no se dispone verticalmente el paramento exterior, el coste de la mano de obra será con corta diferencia el mismo, cualquiera que sea la inclinación de dicho paramento; y si hay que emplear un revestimiento de piedra cortada á escuadra ó de ladrillo, deberán colocarse estos materiales normalmente á la superficie exterior. Esta misma disposición puede también adoptarse para los sillares de ángulo formando las aristas salientes á que da lugar el encuentro del muro ataluzado con las obras destinadas al paso de las corrientes de agua, obras cuyos planos de frente son verticales. Se evita con esto la formación de ángulos agudos y al mismo tiempo se simplifica la labra. Sin embargo, si se quisiera armonizar el aparejo de estas piezas de ángulo con las hiladas de los mencionados planos de frente, podría adoptarse el trazado que indica la figura 52. El aumento de coste en la labra quedará sobradamente compensado con el ahorro de volumen que se consigue en el muro al darle un fuerte talud exterior.

Cuando se adopte la marcha indicada para fijar la sección de un muro de sostenimiento, es decir, disponiendo verticalmente el paramento interior y dando al macizo de fábrica una latitud al noveno de un tercio de la altura, habrá que referir este tercio á la altura del muro aumentada con la de la sobrecarga, sobre todo si la obra ofrece poca elevación. Es evidente que la máxima inclinación que podrá darse al paramento exterior dependerá de la diferencia existente entre el ancho al noveno y la latitud necesaria para la coronación.

100. Sucede á menudo que un muro destinado á sostener el terraplén de una carretera ó de un camino de hierro atraviesa un barranco; en este caso la altura del muro varía desde la que corresponde al punto más bajo, hasta las extremidades en donde á veces es casi nula ó de poca importancia. Cuando se dispone el muro con retallos en el interior, suele darse á éstos una dirección paralela al paramento visto (fig. 53_a), prolongándolos hasta los encuentros con las dos laderas del barranco. Pero si el paramento interior es vertical y al mismo tiempo se adapta un pequeño talud $\frac{1}{10}$, por ejemplo, para el exterior, dichos dos paramentos no tendrán ya la misma dirección; se asignará á la sección de máxima altura la latitud de coronación que resulte después de aplicar la ley de transformación al perfil tipo rectangular; en las extremidades el ancho superior decrece, aunque no podrá ser menor que el que tienen las losas; quedará, pues, formado el paramento interior por dos planos verticales que, partiendo del centro del barranco hacia las extremidades, se van aproximando á la arista exterior de coronación. La mayor ó menor aproximación dependerá del trazado de la sección correspondiente á la extremidad del muro, sección que se determinará conforme á las reglas establecidas (fig. 53_b).

Hemos visto que se obtenía mayor economía de fábrica aumentando todo lo posible el talud exterior, de modo que haciendo también vertical el paramento interior, no se deje mayor ancho de coronación que el preciso para sentar las losas. Como este ancho debe entonces ser el mismo en toda la longi-

tud del muro, es evidente que el máximo de esta economía se verificaría disminuyendo dicho talud exterior á medida que decrece su altura; pero esto exigiría la ejecución de un paramento alabeado y una mano de obra más costosa. Para evitar este inconveniente, así como el mal aspecto que podría presentar el muro, será preferible hacer plano este paramento dándole la inclinación correspondiente á la sección de mayor altura (figura 53_c.) La economía de volumen será siempre importante.

MUROS EN DESPLOME

101. Para el estudio de los muros en desplome seguiremos el mismo camino adoptado para los que tienen sus paramentos con talud. Las fórmulas que dan el empuje y el ancho de coronación son las mismas, salvo el cambio de signo del ángulo θ, y por consiguiente, de m.

Se conoce la expresión del empuje [15] (**37**)

$$Q = \frac{\delta}{2} H^2 \left[\text{tang. } (\beta + \theta) - \text{tan. } \theta \right] \frac{\text{sen. } (\alpha - \varphi)}{\text{sen. } (\beta + \varphi)}.$$

Haciendo variar el ángulo θ que forma el paramento interior en desplome con la vertical, obtendremos los valores indicados á continuación:

NÚMERO 13

CUADRO *de empujes para distintas inclinaciones del paramento interior en desplome.*

$m = \text{tan. } \theta$	θ	$B = \frac{90 - \theta - \varphi}{2}$	Q
			K.
0,0	0° 0′	25° 0′	173,95 H^2
0,1	5° 42′	22° 9′	146,08 —
0,2	11° 19′	19° 20 ½	121,02 —
0,3	16° 42′	16° 39′	98,24 —
0,4	21° 48′	14° 6′	75,56 —

El ancho de coronación se deduce de la misma ecuación (**78**)

$$e^2 + \frac{D - 2Q' B}{E} \times e = \frac{2Q' A - C}{E},$$

en la que los coeficientes A, B, C, D y E, tienen los valores antes expresados (**72**), salvo la variación de signo de m y de sen. θ. La ecuación lleva ya cambiado el signo de $B =$ sen. θ.

Mediante la aplicación de esta ecuación se formará el siguiente cuadro, en el que se consignan los anchos de coronación y los anchos medios:

NÚMERO 14

CUADRO *de anchos de coronación y de anchos medios para los muros en desplome.*

θ. tang. $= m$	ANCHOS PARA									
	$n = 0$		$n = 0{,}1$		$n = 0{,}2$		$n = 0{,}3$		$n = 0{,}4$	
	De coronación.	Medios.	De coronación.	Medios.	De coronación.	Medios.	De coronación.	Medios.	De coronación.	Medios.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
0	0,325 H	0,325 H	0,230 H	0,280 H	0,145 H	0,245 H	0,068 H	0,218 H		
0,1			0,264 —	0,264 —	0,181 —	0,232 —	0,105 —	0,205 —	0,038 H	0,188 H
0,2					0,205 —	0,205 —	0,135 —	0,185 —	0,069 —	0,169 —
0,3							0,154 —	0,154 —	0,094 —	0,144 —
0,4									0,108 —	0,108 —

No hemos llevado la inclinación del paramento en desplome sino hasta hacerlo paralelo al otro paramento.

Se ve por este cuadro que los anchos medios disminuyen á medida que aumenta la inclinación del paramento exterior, así como la del interior. Suponiendo que se ha fijado de antemano el talud exterior, si se dispone el paramento en desplome paralelamente al opuesto, se obtendrá mayor economía de fábrica que si se le da menor inclinación.

102. Los muros en desplome necesitan estar sostenidos, lo que se consigue de dos distintos modos. Se apoyan sobre un macizo de piedra en seco dispuesto á lo largo del muro por la parte interior, ó bien se construyen de distancia en distancia contrafuertes interiores de mampostería con mezcla, formando cuerpo con el muro. El primer medio puede emplearse cuando abunda la piedra en la masa con que se forma el terraplén; pero para lograr el resultado apetecido, es preciso sentar bien el macizo de sostenimiento sobre un suelo firme, así como debe también esmerarse la mano de obra en la colocación de la piedra. Creemos, sin embargo, que el empleo de contrafuertes de mampostería con mezcla, unidos al muro, ha de ofrecer siempre mayores garantías de seguridad contra todo movimiento.

Puede darse á estos contrafuertes la sección triangular que se halla comprendida entre el paramento en desplome y la vertical que parte de la arista interior de la coronación (fig. 54). Será conveniente separarlos 5 metros de eje á eje, asignándoles un espesor de $0^{m},60$ á $1^{m},20$, según la altura.

Designemos este espesor por a, por l la distancia entre los contrafuertes de eje á eje, y por m el desplome; tendremos para el aumento de volumen por metro lineal de muro, á que dan lugar dichos contrafuertes,

$$\frac{ma}{2l} \times H^2.$$

Haciendo $a = 1^{m},00$, $l = 5^{m},00$, y si e es la relación del espesor medio del muro á su altura, el volumen total de mampostería por metro lineal será

$$V = (e + 0{,}10\ m)\ H^2.$$

Supongamos que se trata de un muro de espesor uniforme con desplome de 0,3; este mismo volumen tendrá por valor

$$V = (0{,}154 + 0{,}03)\ H^2 = 0{,}184\ H^2.$$

Comparando este volumen con el del muro rectangular, se

ve que exige este último casi doble cantidad de mampostería. Tomando aún la sección con talud exterior de 0,3 y paramento interior vertical, se observa que sobrepuja á la del muro en desplome en 13 por 100.

Pero se concibe que los contrafuertes han de aumentar la estabilidad del muro, y que si queremos atenernos al coeficiente 2, hasta ahora adoptado, podrá reducirse en algún tanto el espesor del entrepaño.

103. Al objeto de conocer esta reducción, se supondrá que el terraplén está dividido en trozos independientes, por medio de los planos verticales coincidiendo con las caras laterales de los contrafuertes; de modo que éstos recibirán de los trozos correspondientes, y sobre la cara vertical posterior, un empuje horizontal, mientras que los entrepaños tendrán que sostener el empuje normal á su paramento interior.

Constituyendo toda la mampostería un solo cuerpo, podrá formarse la ecuación de equilibrio expresando que la suma de momentos de los pesos del entrepaño y de un contrafuerte, es igual al momento del empuje sobre el entrepaño, más el momento del empuje sobre el contrafuerte, multiplicados estos dos últimos momentos por el coeficiente 2. Unicamente consideraremos muros en desplome de igual espesor con contrafuertes triangulares.

Adoptando los mismos datos para las densidades, así como para el ángulo de rozamiento de las tierras, y designando siempre por Q' el empuje sobre el entrepaño, empuje que varía con el ángulo θ del desplome; si recordamos además que el empuje horizontal sobre el contrafuerte es igual á 174 H^2, se llega á la ecuación

$$e^2 + [1{,}20 \text{ tang. } \theta - 0{,}00145\, Q' \text{ sen. } \theta]\, e = \frac{0{,}00048}{\cos.\ \theta}$$
$$+ 0{,}0211 - 0{,}1333 \text{ tan.}^2\ \theta.$$

Dando á Q' los valores de empuje correspondientes á distintas inclinaciones del desplome (**101**) (cuadro 13), podrá dis-

ponerse el siguiente cuadro, en el que se indican además los espesores hallados ya para el muro sin contrafuertes (cuadro 14).

NÚMERO 15

CUADRO *de espesores de los muros en desplome de igual grueso con contrafuertes ó sin ellos.*

Desplome. — $m = \text{tang.}\ \theta$	Empuje sobre el entrepaño. Q'	ESPESORES DEL ENTREPAÑO		VOLUMEN TOTAL CON CONTRAFUERTES.
		Con contrafuertes.	Sin contrafuertes.	
	K.	m	m	m^3
0,10	146	0,255 H	0,264 H	0,265 H^2
0,20	121	0,189 –	0,205 –	0,209 –
0,30	98,24	0,127 –	0,154 –	0,157 –
0,40	75,56	0,074 –	0,108 –	0,114 –

Hemos visto que colocando los contrafuertes á la distancia de 5 metros de eje á eje y dándoles un grueso de un metro, el volumen de estos contrafuertes por unidad de longitud de muro estaba representado por 0,1m; por lo tanto, si se añaden respectivamente el décimo de las cantidades contenidas en la primera columna del cuadro anterior á los espesores señalados en la tercera, se obtendrá el volumen total. Pero los resultados son muy ligeramente superiores á los espesores de la cuarta columna; puede, pues, decirse, que á igualdad de estabilidad, los volúmenes de un muro en desplome con contrafuertes ó sin ellos, son los mismos.

De aquí se deduce, que si después de haber calculado el espesor de un muro en desplome sin contrafuertes, se quiere aplicarle interiormente estos macizos salientes, podrá reducirse el espesor de la cantidad necesaria para formar los contrafuertes, es decir, de 0,02 H para un desplome de 0,2, y 0,03 H si el desplome es de 0,3; así sucesivamente. La ligera disminu-

ción de estabilidad á que parece dar lugar esta regla, se halla compensada con el rozamiento que podría desarrollarse en las caras laterales de los contrafuertes. Obsérvese, además, que la hipótesis admitida de una subdivisión ficticia del terraplén en trozos que actúan independientemente, es favorable á la estabilidad.

104. Los espesores de entrepaño señalados en la penúltima columna del cuadro anterior, para los muros en desplome de caras paralelas con contrafuertes, pueden reducirse aún más, como se ha hecho en algunos muros modernos de cierta importancia, en los que interesaba disminuir el volumen de mampostería. Para esto, se dispone entre los contrafuertes un relleno de tierra apisonada, ó mejor aún, de piedra en seco colocada á mano, relleno que hasta cierto punto puede considerarse como formando cuerpo con la mampostería, y resistiendo con ella al empuje de las tierras, que obra entonces sobre la cara vertical de dicho relleno.

Para compensar hasta cierto punto la falta de cohesión del macizo colocado entre los contrafuertes y el defecto de unión con la fábrica, puede adoptarse para el cálculo, como densidad media del prisma triangular formado por el relleno y por los contrafuertes, la densidad del terraplén que produce el empuje. Entonces no es necesario considerar más que una longitud de muro igual á la unidad, y la ecuación de equilibrio será

$$\delta' e \left(\frac{\text{tang.}\,\theta + e}{2}\right) + \frac{\delta\,\text{tang.}\,\theta}{2}\left(e + \frac{2}{3}\,\text{tang.}\,\theta\right) = \frac{2Q'}{3}\,;$$

si hacemos

$\delta' = 2.200$ para la densidad de la mampostería,

$\delta = 1.600$ para la densidad de las tierras,

$Q' = 174$ para el empuje horizontal sobre un metro de altura,

la ecuación anterior se convierte en

$$e^2 + 1{,}7272\ \text{tang.}\ \theta \quad e = 0{,}10545 - 0{,}4845\ \text{tang.}^2\ \theta,$$

por medio de la que se determina el espesor de entrepaño.

Pero debe observarse que la construcción del relleno exige

cierta mano de obra, cuyo costo por metro cúbico apreciaremos en 15 por 100 del valor relativo á la misma unidad de fábrica con mezcla; es decir, que si V es el volumen del relleno, supondremos que el exceso de mano de obra equivale al valor de un volumen de mampostería igual á 0,15 V. Fácilmente se verá que hay que añadir la cantidad 0,06 tang. θ al volumen real de mampostería, para hallar el valor económico del muro. Dicha cantidad se obtiene multiplicando por 0,15 el volumen del relleno por metro lineal de muro, volumen que es $\frac{4}{10}$ tang. θ.

Podrá, pues, disponerse el siguiente cuadro:

NÚMERO 16

CUADRO *de espesores del entrepaño, volúmenes de mampostería con mezcla y valores económicos de los muros en desplome de grueso uniforme con contrafuertes y relleno.*

Desplome. — $m =$ tang. θ	Espesor del entrepaño. e	Volumen total de mampostería con mezcla.	Valor económico del muro con relleno.
	m	m^3	m^3
0,1	0,243 H	0,253 H^2	0,259 H^2
0,2	0,168 —	0,188 —	0,200 —
0,3	0,100 —	0,130 —	0,148 —
0,4	0,038 —	0,078 —	0,102 —

Se supone siempre que los contrafuertes tienen un espesor de un metro y que están separados 5 metros de eje á eje.

La comparación de la cuarta columna de este cuadro con la última del que le precede, demuestra que la economía obtenida con el nuevo sistema de construcción es bastante escasa; menor aún sería, y podría dar también lugar á un aumento de gasto, si el relleno fuese más costoso de lo que hemos supuesto, y esto evidentemente sucedería si se quisiera ejecutarlo con piedra, no hallándose ésta en cantidad suficiente en el terra-

107. Haremos por fin una última observación sobre los resultados del cuadro. Se han calculado los valores que indica para ρ considerando el muro independientemente de todo apoyo; pero si á este muro se agregan los contrafuertes de que hemos hablado, formando cuerpo con él, es evidente que las presiones en la base habrán disminuído. Para conocer estas presiones deben modificarse los cálculos.

Por de pronto, la determinación de la distancia d del punto de paso de la resultante á la arista de giro exige que se tenga en cuenta, no sólo el peso del muro, sino también el de los contrafuertes. Además deberá, en rigor, dividirse el empuje en dos partes: el que corresponde al intervalo de los contrafuertes y el que obra sobre la cara vertical de los mismos, que es relativamente mayor.

Para efectuar este cálculo, es preciso tomar una longitud de muro que comprenda un contrafuerte y los dos semientrepaños adyacentes. Una vez fijada en la base la posición del punto de paso de la resultante, será fácil determinar la presión unitaria ρ por medio de la fórmula [1] (**9**)

$$\rho = \mathrm{P}\left(\frac{x_1 x}{\mathrm{I_y}} + \frac{1}{\Omega}\right),$$

en la cual P designa la suma de fuerzas verticales, es decir, el peso de la mampostería, menos la componente vertical del empuje oblicuo sobre el entrepaño, componente que obra de abajo hacia arriba; Ω el área de la base; x_1 distancia del punto de paso de la resultante al centro de gravedad de esta base; x distancia de un punto cualquiera tomado sobre el eje del contrafuerte al mismo centro de gravedad; $\mathrm{I_y}$ el momento de inercia de la base con respecto á una recta perpendicular al referido eje y pasando por el centro. La presión máxima corresponderá al mayor valor positivo de x que se encuentra del mismo lado que la resultante, y la presión mínima á la mayor longitud de x situada del lado opuesto, y que será negativa.

Hemos aplicado estos cálculos á muros en desplome con contrafuertes triangulares de un metro de grueso y separados 5 metros de eje á eje. El espesor del entrepaño está indicado en la tercera columna del cuadro núm. 15.

NÚMERO 19

CUADRO *de presiones máxima y mínima en la base de los muros en desplome de caras paralelas con contrafuertes triangulares.*

Desplome. $m = \text{tang. } \theta$	Fuerzas verticales. ΣP	DISTANCIAS.		Area de la base. Ω	Momento de inercia. I	PRESIONES ρ	
		d	x_1			Máxima.	Mínima.
	K.	m.	m.	m²		K.	K.
0,1	2856 H²	0,092 H	0,035 H	1,295 H	0,0070 H³	0,4110 H	0
0,2	2204 —	0,106 —	0,022 —	1,145 —	0,0097 —	0,2548 —	0,0658 H
0,3	1614 —	0,122 —	0,010 —	0,995 —	0,0124 —	0,1897 —	0,1340 —
0,4	1108 —	0,148 —	0,012 —	0,755 —	0,0166 —	0,1596 —	0,1219 —

Comparando las presiones máximas que acabamos de obtener con las análogas del cuadro núm. 18 (**106**), se ve que los contrafuertes han ocasionado un ligero aumento en las dos primeras inclinaciones, mientras que han producido una disminución considerable en las dos últimas, especialmente en la que corresponde al desplome 0,4 que antes era infinita. Pero debe advertirse que todas las presiones máximas tienen lugar sobre la arista exterior de la base en los muros con contrafuertes, y que cuando estos no existen se verifica el máximo por la parte interior para los tres últimos desplomes, y por el exterior para el primero.

No siendo el desplome más que de $\frac{1}{10}$, el muro se sostiene sin necesidad de apoyo; pero sea que se le agreguen contra-

fuertes ó que se supriman, la máxima presión en la base es próximamente de 4.000 H kilog. por metro cuadrado. Si la altura del muro fuese de 20 metros ó más, este máximo excedería del tipo unitario adoptado en la práctica para las mamposterías; pero podría corregirse el inconveniente, aumentando en algún tanto el talud del paramento exterior, caso de ser factible, aunque se conservara el mismo desplome de $\frac{1}{10}$, por el lado interior.

108. Hemos tratado de establecer un procedimiento gráfico y fórmulas sencillas que permitan fijar las dimensiones de los muros en desplome.

Se reduce el procedimiento á efectuar las siguientes construcciones: Trácese la sección rectangular tipo EFMN (fig. 56), cuyo ancho sea, por ejemplo, la tercera parte de la altura; por el punto I situado al noveno del lado MN, se hace pasar el paramento exterior DC con la inclinación que se quiera; luego por el punto K tomado sobre FE á los tres décimos á partir de arriba, ó á los siete décimos contando desde abajo, se trazará el paramento interior AB, sea que se disponga paralelo á DC, ó con menor inclinación.

El método no puede ser más sencillo, pero es preciso justificarlo y conocer su grado de exactitud. Para esto obsérvese que si llamamos como siempre n y m las inclinaciones de los paramentos CD y BA, tendremos para el ancho medio del trapecio ABCD, construído según acaba de explicarse

$$E_m = \left(\frac{1}{3} - \frac{3\frac{1}{2}}{9} \times n - 0,2\,m\right)H$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0,39\,n - 0,2\,m\right)H$$

ó en números redondos

$$E_m = \left[\frac{1}{3} - (0,4\,n + 0,2\,m)\right]H. \qquad [50]$$

Cuando los dos paramentos son paralelos, se verifica $n = m$, y

$$E_m = \left(\frac{1}{3} - 0,6\ m\right)H. \qquad [51]$$

Estas dos fórmulas dan, con la suficiente aproximación, el espesor medio de un muro en desplome en los casos que con más frecuencia se presentan en la práctica. Pero compararemos los resultados procedentes de la aplicación de dichas fórmulas con los espesores consignados en el cuadro de anchos que hemos calculado, y podrá formarse el siguiente estado comparativo:

NÚMERO 20

ESTADO *comparativo de anchos medios de los muros en desplome, según la teoría y la regla práctica propuesta.*

m = tan. θ	ANCHOS MEDIOS PARA							
	$n = 0,1$		$n = 0,2$		$n = 0,3$		$n = 0,4$	
	Teoría.	Regla práctica.	Teoría.	Regla práctica.	Teoría.	Regla práctica.	Teoría.	Regla práctica.
	m	m	m	m	m	m	m	m
0,1	0,264 H	0,274 H	0,232 H	0,235 H	0,205 H	0,196 H	0,188 H	0,157 H
0,2			0,205 —	0,215 —	0,185 —	0,176 —	0,169 —	0,137 —
0,3					0,154 —	0,156 —	0,144 —	0,117 —
0,4							0,108 —	0,097 —

Se ve por este cuadro, que salvo el caso de un muro con desplome de 0,4, la regla práctica da, para las demás inclinaciones del paramento interior, anchos que difieren de los que indica la teoria en 3 á 5 por 100, lo que puede muy bien admitirse. Aun para el último caso, y con paramentos paralelos, es decir, para $n = m = 0,4$, el error no es más que de 10 por 100.

109. La construcción gráfica, así como las fórmulas prácticas, mediante las cuales proponemos determinar las dimensiones de un muro en desplome, parten de la relación del tercio aplicada al perfil tipo rectangular. Pero de la misma manera que hemos explicado en el artículo anterior para los muros con taludes, dicha relación es también en este caso susceptible de modificarse, cuando á consecuencia de experiencias, se hallen resultados que difieran bastante de los términos medios adoptados para la relación de las densidades, y para el ángulo del talud natural de las tierras.

La modificación deberá tener lugar igualmente cuando el terraplén se halla sometido á una sobrecarga representada por una capa de tierra de cierta altura. Se tomará entonces para el ancho del rectángulo tipo el tercio de la altura del muro aumentada en la de la sobrecarga; el resto de la construcción no sufre alteración ninguna.

Es evidente que en el caso que consideramos, la fórmula que da el ancho medio será

$$E_m = \frac{1}{3}(H + h) - (0{,}4\,n + 0{,}2)\,H \qquad [52].$$

MUROS CURVOS

110. Los muros con perfil curvilíneo pertenecen á la categoría de los muros en desplome, de los que solo difieren por la curvatura. Se adopta generalmente para la sección de los paramentos un arco de círculo, cuyo centro se halla en la horizontal de la coronación.

Dándose la altura del muro $CA = H$ (fig. 57), y el desplome $CB = mH$, se obtendrá la magnitud del radio $OB = R$, por medio de la fórmula conocida

$$R = \frac{m^2H^2 + H^2}{2mH} = \frac{m^2 + 1}{2m}\,H.$$

Es lo más frecuente disponer los muros curvos con espesor

uniforme de arriba abajo. Si se mide horizontalmente este espesor constante, deberá trazarse el paramento exterior ED, con el mismo radio que el AB, corriendo al efecto el centro O á una distancia OO′ igual al ancho de coronación; sin embargo, será preferible disponer los dos perfiles según dos arcos concéntricos, con lo que resulta un poco más de latitud en la base, y se coloca el muro en mejores condiciones de resistencia al aplastamiento.

111. Hemos dado en el capítulo II (**44**) el método aproximado que puede emplearse para hallar la resultante del empuje de las tierras sobre un paramento curvo. Conviene recordar este método en pocas palabras.

Se reemplaza el perfil circular por un polígono inscrito; basta para la práctica que este polígono tenga cuatro lados, pudiéndose situar los vértices sobre las horizontales que dividen la altura total del muro en cuatro partes iguales. Deberá luego determinarse el empuje de las tierras sobre cada uno de los lados del polígono, prolongados hasta la horizontal de la coronación, es decir, sobre A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, (figura 58). Los resultados darán lugar á los cuatro triángulos de empuje DE_1F_1, DE_2F_2, DE_3F_3, DE_4F_4: los trapecios que resultan de las diferencias entre los triángulos sucesivos representan los empujes sobre los respectivos lados del polígono que forma el perfil interior del muro; pero deberán corregirse estos trapecios elevando en cierta cantidad las bases superiores al objeto de tener en cuenta las distintas inclinaciones de los planos de rotura.

Los centros de gravedad de los trapecios modificados y el del triángulo superior fijan las alturas de los puntos de aplicación de cada empuje parcial perpendicular al lado del polígono, y cuyas intensidades están dadas por las áreas de estas figuras. Se construirá, por último, el polígono de las fuerzas que dará á conocer la dirección y la intensidad de la resultante de los empujes, obteniéndose la posición de esta resultante con el trazado del polígono funicular.

Ya no queda más que medir el brazo de palanca de la re-

sultante, calcular luego su momento con respecto á la arista exterior de la base, y comparar este momento con el relativo al peso del muro.

112. Daremos los resultados de aplicación de este método á un muro curvo de 10 metros de altura, con un desplome de 0,3, y cuyo espesor uniforme, medido horizontalmente, es de $1^m,54$, es decir, el espesor que indica la teoría para un muro de igual altura y desplome, pero cuyos paramentos están formados por los planos que unen las aristas superiores é inferiores de las superficies curvas.

El perfil circular interior ha sido reemplazado por un polígono inscrito de cuatro lados, cuyas proyecciones verticales son todas iguales á $2^m,50$. Se han determinado luego los triángulos de empuje que corresponden á estos lados prolongados hasta la coronación; advirtiendo con este motivo, que cuando el terraplén enrasa con la coronación del muro, se obtienen fácilmente dichos triángulos.

En efecto; sea AB (fig. 59), uno de los lados prolongados del polígono; si por A se trazan dos rectas AO y AM, formando un ángulo φ (igual á 40°, término medio), una con AB y la otra con la horizontal AN, sabemos que el plano de rotura AX divide en dos partes iguales el ángulo BAM, y que trazando BX′ paralela á AX, se obtiene la longitud AX′ de la expresión [9] del empuje (**27**). Se ha visto también (**35**) que la intensidad de este empuje se halla representada por el peso de un prisma de tierra, cuya sección es un triángulo que tiene por base la recta AX′, y por altura su proyección X′J sobre la normal al talud natural de las tierras AM. No queda más que transformar este triángulo en el de empuje DEF que tenga la misma área y la altura del muro.

Esta transformación es muy sencilla. En efecto; volvamos por un momento á la figura 31; si después de haber construído con las dos longitudes AX′ y X′J, como catetos, el triángulo rectángulo MIN, y fijada la altura IL del muro, se traza por M una paralela á la recta que une los puntos L y N, dicha paralela cortará al lado IN en el punto U que determina el

vértice desconocido del triángulo de empuje designado en dicha figura 31 por LIU.

Para demostrar la equivalencia de este triángulo con el MIN, obsérvese que ambos resultan de restar del triángulo LIN dos áreas equivalentes, como son las de los triángulos LMN y LUN, que tienen una misma base LN y sus vértices opuestos M y U, sobre una paralela á dicha base.

Los empujes parciales obtenidos para cada uno de los lados del polígono $B_1A_1A_2A_3A_4$ (fig. 58), son como sigue:

para el	1.er	lado	superior	1.067	kilogramos.
»	2.º	»	»	2.362	—
»	3.º	»	»	2.941	—
»	4.º	»	»	2.498	—

Cada uno de estos empujes es normal al lado respectivo.

La construcción del polígono de fuerzas asigna á la resultante un valor de 8.425 kilogramos con dirección casi normal á la cuerda del arco que forma el paramento interior, aunque algo más levantada que dicha normal. Trazando el polígono funicular, se halla que el punto de aplicación de la resultante está situado un metro más arriba que el tercio de la altura del muro, y se comprende esto, pues los empujes parciales sobre los lados superiores son relativamente mayores que sobre los inferiores, á causa de la mayor inclinación de estos últimos.

Se obtiene para el momento de la resultante con respecto

á la arista de giro la cantidad 46.552
el momento del peso del muro curvo es 95.532

La relación entre estos dos momentos produce para el coeficiente de estabilidad el valor 2,04; resultado que demuestra que puede perfectamente admitirse, para un muro curvo, el mismo espesor que asigna la teoría á un muro recto de igual desplome y altura.

Adviértase que el empuje sobre este muro recto (véase el cuadro núm. 13 de empujes), tiene un valor de 9.824 kilogramos, que es superior al del muro curvo; pero su momento es

menor, no llegando más que á 38.510, por ser menor también el brazo de palanca. Por otra parte, el peso del muro recto, por más que es idéntico al del otro muro, tiene asimismo un momento menor, y es 77.924. La relación de los dos momentos da para el muro recto un coeficiente de estabilidad igual á 2,02, es decir, el mismo que antes.

113. El método que hemos expuesto para determinar el empuje de las tierras sobre un paramento curvo, no se halla completamente exento de crítica, á pesar de la corrección introducida en los trapecios representativos de los empujes parciales, para tener en cuenta la diferente inclinación de los planos de rotura. Podrá muy bien suceder que el prisma de tierra, que produce la totalidad del empuje, tienda á desprenderse del macizo general según una superficie que no sea plana; pero lo mismo podrá verificarse tratándose de un paramento recto, á causa de la influencia que ejerce la cohesión de las tierras, que constituye, además, un elemento de resistencia sumamente variable de uno á otro macizo. Pero, puesto que se acuerda omitir este elemento en los cálculos, tan admisible debe considerarse el procedimiento propuesto para los paramentos curvos, como el que señala la teoría á los rectos.

114. Conviene ahora examinar la resistencia que ofrece un muro curvo á los dos movimientos de deslizamiento y de aplastamiento.

Hemos visto que el empuje Q sobre un muro semejante, era menor que el que actúa sobre un muro recto de igual desplome. Lo mismo tendrá lugar para sus dos componentes vertical y horizontal, y como el peso del muro no varía, la aplicación de la fórmula

$$f = \frac{Q \cos. \theta}{P - Q \operatorname{sen.} \theta},$$

dará resultados menores aún que para dichos muros rectos en desplome. En estos últimos, θ designa el ángulo del desplome, ó sea el ángulo del empuje con la horizontal. En la anterior fórmula aplicada á los muros curvos, θ representa también el

ángulo del empuje con el horizonte, si bien dicho ángulo no es exactamente igual al del desplome, pero la diferencia carece de importancia para los resultados.

Podemos pues, decir, que bajo el punto de vista del movimiento de deslizamiento, los muros curvos se hallan en condiciones de resistencia, por lo menos tan favorables como las que tienen los rectos en desplome.

115. Ocupémonos de la compresibilidad. Hemos hallado para la resultante del empuje sobre el muro curvo una posición algo más elevada que para el recto y con dirección casi paralela. Esta circunstancia, considerada aisladamente, alejaría de la arista interior el punto de encuentro con la base, á mayor distancia para el primer muro que para el segundo. Pero como el empuje sobre el paramento curvo es inferior al que actúa sobre el paramento plano, hallándose además el centro de gravedad del muro curvo á mayor proximidad de las tierras, se verifica por este doble motivo que la resultante final se encuentra situada más hacia el interior. Sucede, en resumen, en el ejemplo que hemos estudiado, que el punto de encuentro de dicha resultante con la base está más próximo á la arista interior para el muro curvo que para el recto. La presión unitaria en esta arista habrá aumentado; pero los contrafuertes de sostenimiento que se añaden á los muros de que nos estamos ocupando, trasladarán la máxima presión á la arista de dichos contrafuertes. Podrá darse algún talud á estos últimos, aumentando el vuelo en la parte inferior, en el caso en que la compresión máxima resultara demasiado fuerte.

Puede disminuirse el espesor uniforme del muro curvo de la cantidad necesaria para formar el volumen de los contrafuertes, según se indicó para los muros rectos en desplome (**103**); de modo que el volumen total de fábrica por metro lineal de muro no aumente. La reducción no afectará sensiblemente á la estabilidad de la construcción.

Los muros curvos, á los que se da el mismo espesor que á los rectos de igual desplome, se hallan, pues, en buenas condiciones de resistencia. Esto demuestra que podrá aplicarse á los

primeros el procedimiento gráfico ó la fórmula empírica indicada (**108**) para los segundos, así como también las correcciones de que es susceptible la relación tipo del tercio de la altura, para atender á las variaciones de densidad ó del ángulo de rozamiento de las tierras, y por fin á las sobrecargas.

Los muros curvos, comparados con los rectos en desplome, tienen la ventaja de ofrecer mejor aspecto en ejecución. Con igual facilidad pueden construirse, si es que se reemplaza el perfil circular por otro poligonal de cuatro lados, según hemos indicado al calcular el empuje, con lo que no se disminuye sensiblemente su buen efecto.

Con frecuencia se emplean en Inglaterra los muros en desplome y más aún los muros curvos. Según varios perfiles indicados por *M. Tony Fontenay*, los ingleses dan á estos muros, para una altura de $5^{m},45$ y un desplome de $1^{m},00$, el espesor de $1^{m},10$. El desplome es en este caso $m = \frac{1}{5,45} = 0,183$, y nuestra fórmula [54] (**108**)

$$e = \frac{1}{3} - 0,6 \text{ m.}$$

produce una relación $e = 0,2235$; de donde resulta para el espesor, $E = 0,2235 \times 5^{m},45 = 1^{m},22$, en vez de $1^{m},10$.

116. Se emplean también muros de sostenimiento cuyo paramento interior es plano y curvo el exterior. Citaremos con este motivo un excelente tipo, adoptado en la línea férrea de *Rodez* á *Milhau*, que se recomienda por sus buenas condiciones de resistencia, así como por la economía de volumen.

La sección ABCD de este muro (fig. 60), cuya altura es de $12^{m},50$, tiene en la coronación un ancho de $1^{m},30$ y en la base $4^{m},22$; el paramento interior presenta un desplome de $\frac{1}{10}$, y el exterior ha sido trazado según un arco de círculo de 30 metros de radio, resultando que la cuerda de este arco corresponde á un talud de $\frac{1}{3}$.

Si aplicamos el cálculo á esta sección de muro, adoptando á la par los mismos datos ya empleados, ó sea
2.200 kil. para el peso del metro cúbico de fábrica;
1.600 kil. para el peso del metro cúbico de tierra;
40° para el ángulo del talud natural de las tierras;
se llega á los siguientes resultados:

Momento de los pesos con respecto á D.	214.133
Momento del empuje.	105.182
Suma algebráica de momentos.	108.951
Suma de fuerzas verticales.	60.705

Si dividimos las dos últimas cantidades una por otra, se halla para la distancia de la resultante á la arista de giro

$$d = \frac{108.951}{60.705} = 1^{m},78.$$

Esta distancia es mayor que el tercio de la base; aplicando, pues, la primera fórmula del trapecio, se obtiene para la máxima presión unitaria en la base

$$\rho = \frac{2 \times 60.705}{4,22}\left(2 - \frac{3 \times 1,78}{4,22}\right) = 21.250 \text{ kils.},$$

ó poco más de 2 kilog. por centímetro cuadrado.

Dividiendo también el momento de los pesos por el momento del empuje de las tierras, se llega á un coeficiente de estabilidad ligeramente superior á 2. Indican estos resultados que el muro de que tratamos se halla en las mismas condiciones de estabilidad que hemos admitido para obras análogas.

En cuanto al volumen que es de $28^{m^3},625$ por metro lineal de muro, puede ponerse bajo la forma

$$V = 0,183 \times (12^{m},50)^2 = 0,183\ H^2;$$

lo que hace ver que no excede mucho de la mitad del volumen correspondiente á una sección rectangular. Razón teníamos, pues, al decir que este muro se recomienda por su economía.

117. Hemos dicho que en general los muros en desplome necesitan estar sostenidos con macizos de piedra en seco ó con contrafuertes interiores. Pero es evidente que estos apoyos no son indispensables sino en tanto que el desplome es algo fuerte. No pasando de $\frac{1}{10}$, como en el ejemplo que examinamos, el muro se sostendrá muy bien por sí solo.

Si en lugar del paramento curvo BD, se hubiese adoptado el paramento plano EF paralelo á AC, hubiera sido preciso asignar á las bases AE y CF un ancho de $3^m,40$, lo que da un volumen de

$$V = 0,272\ H^2.$$

Cuando se quiera proyectar un muro de sostenimiento semejante al de la línea de Rodez á Milhau, se empezará por determinar, por medio de las reglas indicadas para los muros en desplome, la sección trapezoidal AMNC, cuyos lados AC y MN tienen las inclinaciones fijadas de antemano; luego se reemplazará el paramento recto MN por otro circular ó simplemente poligonal, sujetándole á la condición de no alterar sensiblemente el área de la sección. Se obtendrá de este modo un perfil ABSDC que debe satisfacer á la condición de tener un momento con respecto á D, que difiera muy poco del momento de la sección AMNC con respecto á la arista N, y sea ligeramente superior más bien que inferior, pues aunque el empuje no varía en intensidad y posición, su brazo de palanca con respecto á D, y por lo tanto su momento, son mayores que los que se refieren á N.

118. También se ha empleado en la misma línea de Rodez á Milhau el perfil (fig. 61) que, como el anterior, tiene plano el paramento interior y en arco de círculo el exterior; pero el primero es vertical y la cuerda del arco en el segundo ofrece un talud de $\frac{1}{5}$. La altura del muro es la misma, el ancho de coronación mide $1^m,75$ y el de la base $4^m,25$.

El volumen resulta un poco más crecido que en el otro tipo ($32^{m^3},185$ en vez de $28^{m^3},625$) y puede representarse por

$$V = 0,206\ H^2.$$

Se comprende que á pesar de este exceso de volumen, la estabilidad del muro debe ser menor que en el otro caso, por tener los paramentos menos inclinación.

En efecto; aplicando los cálculos, se obtiene:

Momento de los pesos.	202.622
Momento del empuje.	113.372

Dividiendo el primero de estos momentos por el segundo, resulta para el coeficiente de estabilidad

$$c = \frac{202.622}{113.372} = 1,79.$$

Este coeficiente ha experimentado una reducción de 10 por 100.

La máxima presión unitaria en la base es también más crecida (37.522 kil.), y la resultante dista $1^m,26$ de la arista de giro, cantidad inferior al tercio de esta base.

El perfil últimamente examinado solo ofrece una ventaja sobre el anterior, y consiste en ocupar menos terreno por su pie.

MUROS CON CONTRAFUERTES EXTERIORES

119. Los contrafuertes aplicados á un muro de sostenimiento tienen por objeto consolidarlo, aumentando su resistencia al empuje de las tierras. Constituyen macizos salientes dispuestos de distancia en distancia sobre uno de los dos paramentos del muro, pero formando cuerpo con él. Pueden estar situados de un lado ó de otro, y dar, por lo tanto, lugar á contrafuertes exteriores ó á contrafuertes interiores. Nos ocuparemos en este artículo de los primeros.

Se da generalmente á los contrafuertes un mismo vuelo en toda la altura del muro, y su sección horizontal está casi siem-

pre formada por un rectángulo; así es como los consideraremos. Sin embargo, se suele también unir el rectángulo al muro por medio de dos arcos de círculo, ó se le reemplaza por un trapecio. Estas dos últimas disposiciones dan lugar á un aumento de mano de obra y ofrecen poca ventaja.

La estabilidad de un muro con contrafuertes depende de cuatro cantidades desconocidas, que son: el espesor del muro, la distancia entre los contrafuertes, el espesor de estos últimos, y por fin, su vuelo sobre el paramento del muro. Como la ecuación de equilibrio de giro solo permite hallar una de estas cantidades, hay que fijar forzosamente de antemano las demás, y es lo que hacen los constructores que asignan á las tres primeras los valores que más lejos se indicarán, deduciendo de la mencionada ecuación el vuelo.

Llamemos

e la relación del espesor del muro de sección rectangular á su altura H;
s la relación del vuelo uniforme del contrafuerte á la misma altura;
a el espesor del contrafuerte;
l la distancia á que se hallan los contrafuertes de eje á eje;
c el coeficiente de estabilidad.

El intervalo comprendido entre dos contrafuertes consecutivos, y que llamaremos *entrepaño*, está expresado por $l - a$.

Consideremos una longitud l de muro que comprende un contrafuerte y los semi-entrepaños adyacentes; el momento del peso P que corresponde á dicha longitud, tomado con respecto á la arista de giro, que es la arista exterior del contrafuerte, tiene por valor

$$\mathcal{M}\,\mathrm{P} = \delta' \left[e\mathrm{H}^2 \left(s\mathrm{H} + \frac{e\mathrm{H}}{2} \right) l + \frac{as^2\mathrm{H}^3}{2} \right]$$

$$= \delta'\mathrm{H}^3 \left(\frac{l}{2} e^2 + lse + \frac{as^2}{2} \right).$$

El momento del empuje Q de las tierras sobre la misma longitud de muro, es

$$\mathcal{M}\,\mathrm{Q} = \frac{\delta \text{ tang.}^2 \beta}{6}\,\mathrm{H}^3 l;$$

multiplicando este último momento por el coeficiente de estabilidad c, é igualando el resultado al momento del peso de la fábrica, resulta

$$as^2 + 2les = \frac{\delta \text{ tang.}^2 \beta\, lc}{3\delta'} - le^2;$$

de donde se deduce

$$s = \frac{1}{a}\left[- le + \sqrt{(l^2 - la)\, e^2 + \frac{\delta \text{ tang.}^2 \beta\, lca}{3\delta'}} \right].$$

Este resultado demuestra que á medida que se quiere disminuir la relación e del espesor del entrepaño á la altura, se aumenta al mismo tiempo el vuelo del contrafuerte; pero el volumen del trozo de muro con el contrafuerte, cuyo valor es

$$\mathrm{V} = \mathrm{H}^2\,(le + sa),$$

disminuye también.

Conviene, pues, bajo el punto de vista de la economía de mampostería, reducir el espesor del entrepaño; pero esta reducción tiene un límite, impuesto por la necesidad de evitar la flexión que podría producir el empuje de las tierras.

Se adoptan generalmente en la práctica las siguientes disposiciones: El intervalo de los contrafuertes de eje á eje es de 4 metros; se da un metro al espesor de estos contrafuertes, y al entrepaño un espesor igual á la sexta parte de la altura del muro. Haciendo, pues, en la fórmula anterior

$$l = 4^{\mathrm{m}},00,\quad a = 1^{\mathrm{m}},00,\quad e = \frac{1}{6} \text{ y } c = 2,$$

resulta

$$s = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{8}{11} \times \frac{8}{3} \times 0{,}217} = 0{,}203,$$

lo que indica que el vuelo es la quinta parte de la altura próximamente, cuando se separan los contrafuertes 4 metros de eje á eje, se da á los mlsmos un espesor de $1^m,00$ y al entrepaño el de $\frac{H}{6}$.

Esta regla es muy sencilla y fácil de aplicar; pero según veremos más adelante, no conviene adoptarla para cualquiera altura.

120. Examinemos la resistencia que ofrece al resbalamiento un muro con semejante disposición.

En la anterior expresión de V haremos

$$l = 4^m,00, \quad e = \frac{1}{6}, \quad s = \frac{1}{5};$$

y se obtiene

$$V = 0{,}866\ H^2,$$

para una longitud de muro de $4^m,00$, incluyendo su contrafuerte; el volumen por metro lineal será, pues, 0,217 H^2, volumen que resulta igual al de un muro sin contrafuertes con paramento interior vertical y talud exterior de 0,3, (véase el cuadro de anchos de coronación y anchos medios) (**78**). El empuje de las tierras y el peso de la fábrica por metro lineal son los mismos en ambos casos, así es que el valor de f no cambia y tiene el de 0,36 que indica el cuadro de relaciones entre el empuje horizontal y la carga. El deslizamiento no es, pues, de temer en general.

121. Para el estudio de la resistencia al aplastamiento hay que empezar por hallar la distancia del punto de paso de la resultante en la base á la arista exterior de los contrafuertes, empleando la fórmula [44] (**55**)

$$d = \frac{\mathcal{M}\ \Sigma P - \mathcal{M}\ Q_h}{\Sigma P};$$

en la que ΣP representa aquí el peso de la mampostería, única fuerza vertical que actúa sobre la base, y Q_h el empuje horizontal. Este valor de d permite hallar la distancia x_1 del punto de paso de la resultante al centro de gravedad de la sección tomado como origen de coordenadas; entonces, sirviéndonos de la fórmula [1] dada en el primer capítulo (**9**),

$$\rho = P\left(\frac{x_1 x}{I_y} + \frac{1}{\Omega}\right);$$

fórmula que contiene el momento de inercia I_y de la sección, y su área Ω, obtendremos la presión unitaria ρ en un punto cualquiera de la base definido por su abscisa x.

La máxima y mínima presión tendrán lugar para los valores de x correspondientes á los puntos que se encuentran á mayor distancia del centro de gravedad por uno y otro lado. Pero sabemos que esta fórmula no es aplicable sino en tanto que da siempre para ρ valores positivos. Si en algún punto resulta ρ negativo, hay que reducir la sección de modo que la presión mínima sea nula; esta operación dará lugar á algunos tanteos, que podrían llegar á ser enojosos, en el caso de querer obtener el resultado con gran precisión, lo que no es indispensable.

En el cuadro que sigue se indican las presiones máximas en la base de los contrafuertes, suponiéndolos dispuestos como se ha dicho antes, y aplicando el cálculo á distintas alturas de muro.

NÚMERO 21

CUADRO *de presiones unitarias máximas en la base de los muros con contrafuertes exteriores distantes* $4^m,00$ *de eje á eje.*

H	ρ	H	ρ	H	ρ
m.	K.	m.	K.	m.	K.
4,00	4,3600	12,00	14,5000	20,00	22,2500
8,00	8,9100	16,00	17,7700		

Los anteriores valores de ρ, que se refieren al centímetro cuadrado, hacen ver que los muros con contrafuertes exteriores se hallan sometidos á fuertes presiones unitarias, inadmisibles en la práctica, cuando la altura del muro es de alguna consideración.

Creemos oportuno llamar la atención sobre esta circunstancia, pues existe una marcada tendencia á preconizar esta clase de muros, especialmente bajo el punto de vista de la economía de mampostería. Pero hemos visto que su volumen por metro lineal era igual al de los muros con paramento interior vertical y talud de 0,3 por la parte exterior; resulta de aquí que si se dispone de espacio suficiente para emplazar el paramento inclinado, estos últimos muros, y sobre todo los muros en desplome con igual inclinación serán preferibles, puesto que no interrumpen la continuidad del paramento. Aun sin necesidad de adelantar más terreno, los muros en desplome de $0^m,20$ ofrecerán la misma economía, sin los inconvenientes de los contrafuertes.

122. Existen otras razones que motivan el no poder aplicar siempre la disposición indicada para estos muros. Supongamos, por ejemplo, que la altura sea de 20 metros; es evidente que el espesor de un metro será insuficiente para los contrafuertes; tendrán éstos un vuelo de 4 metros, que supera á la longitud de los entrepaños. Se concibe, además, que el efecto de una obra dispuesta con semejantes proporciones, no ha de ser muy satisfactorio á la vista. Tampoco es lógico fijar el espesor del muro en relación simplemente proporcional á la altura, pues si con esto se propone evitar que el entrepaño se doble, cediendo al empuje de las tierras, parece más natural deducir este espesor de las reglas concernientes á la flexión de los sólidos.

Considérese para esto al entrepaño como empotrado en sus extremidades, y hagamos $k = l - a$ para la longitud de este entrepaño. El empuje de las tierras por metro lineal de muro es $Q'H^2$; dicha presión no es igual de arriba abajo, puesto que se anula en la coronación y va en aumento hasta la base; pero como en esta parte el muro se halla consolidado con el macizo

de fundación, admitiremos que el empuje se reparte con igualdad en toda la altura.

La fórmula relativa á la flexión de un prisma empotrado en sus extremidades, es

$$\frac{1}{12} Q'H^2k^2 = \frac{\gamma H \times e^2H^2}{6},$$

en la que γ representa el trabajo de la mampostería por metro cuadrado. Se deduce de esta ecuación

$$eH = k\sqrt{H}\sqrt{\frac{Q'}{2\gamma}} \quad \text{ó} \quad e = \frac{k}{\sqrt{H}}\sqrt{\frac{Q'}{2\gamma}}.$$

Demuestra esto que el espesor eH del entrepaño crece proporcionalmente á la raíz cuadrada de la altura, ó que la relación e varía en razón inversa de esta misma raiz. El espesor eH aumenta también en razón directa de la longitud k del entrepaño.

123. En vista de estos resultados, adoptemos las siguientes proporciones para un muro de sostenimiento con contrafuertes exteriores:

1.° El espesor de los contrafuertes será el octavo de la altura.

2.° Daremos á la separación de los contrafuertes de eje á eje la mitad de la altura, de modo que resulta $k = \frac{3}{8}$ H.

3.° Como la relación e varía, según hemos visto, proporcionalmente á $\frac{k}{\sqrt{H}}$, y como k es además proporcional á H, haremos $e = 0{,}06\sqrt{H}$. (Este valor de e resulta igual á $\frac{1}{6}$ para $H = 7^m{,}72$.)

Si ateniéndonos á dicha relación para el grueso del entrepaño, quisiéramos averiguar el trabajo de la mampostería, no

habría más que deducir el valor de γ de la ecuación anterior, con lo que se obtiene

$$\gamma = \frac{Q'k^2}{2He^2};$$

sabemos que $Q' = 174$ kils. (**72**); si además damos á k y á e los valores que hemos indicado, resulta

$$\gamma = 3.398 \text{ kilogs.},$$

para el trabajo de la mampostería por metro cuadrado. Recordando el valor de la cohesión, asignado en el primer capítulo, se reconoce que este trabajo no es exagerado y puede admitirse, sobre todo si se tiene cuidado de no cargar el muro con las tierras antes de que el mortero haya fraguado en algún tanto.

Partiendo del espesor $\frac{H}{8}$ dado á los contrafuertes y de su separación $\frac{H}{2}$ de eje á eje, podremos formar la siguiente expresión del momento relativo al peso de una longitud del muro $\frac{H}{2}$ con su contrafuerte

$$\delta'\left[sH \times H \times \frac{sH}{2} \times \frac{H}{8} + eH \times H\left(sH + \frac{eH}{2}\right)\frac{H}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{s^2}{16} + \frac{es}{2} + \frac{e^2}{4}\right)\delta' H^4.$$

El empuje por metro lineal de muro es $174^{k.}\ H^2$, y sobre la longitud $\frac{H}{2}$ será $87\ H^3$. Se tiene, pues, para el momento duplicado de dicho empuje

$$2\,\mathcal{M}\,Q = 2 \times 87\ H^3 \times \frac{H}{3} = 58\ H^4,$$

pudiendo establecer la siguiente ecuación de equilibrio

$$\frac{s^2}{16} + \frac{es}{2} + \frac{e^2}{4} = \frac{58}{\delta'} ;$$

y haciendo $e = 0,06 \sqrt{H}$, y $\delta' = 2.200$ k., se halla

$$s^2 + 0,48 \sqrt{H} \times s = 0,422 - 0,0144 \text{ H};$$

de donde

$$s = - 0,24 \sqrt{H} + \sqrt{0,0432 \text{ H} + 0,422} .$$

Al aplicar esta fórmula á distintos valores de H , se obtienen los correspondientes al vuelo de los contrafuertes que se indican en el siguiente cuadro, así como los espesores de muro dados por la expresión $e = 0,06 \sqrt{H}$. Se ha calculado también el volumen por metro lineal, incluyendo en él lo que corresponde al macizo de los contrafuertes.

NÚMERO 22

CUADRO *que indica el vuelo de los contrafuertes exteriores, el espesor del muro y el volumen total por metro lineal.*

Altura. H	Vuelo de los contrafuertes. sH	Espesor del muro. eH	Volumen total por metro lineal. V
m.	m.	m.	m²
4,00	0,290 H = 1,160	0,120 H = 0,480	0,192 H²
8,00	0,198 – = 1,584	0,170 – = 1,357	0,219 –
12,00	0,138 – = 1,656	0,208 – = 2,494	0,242 –
16,00	0,095 – = 1,520	0,240 – = 3,840	0,264 –
20,00	0,061 – = 1,220	0,268 – = 5,366	0,284 –

124. Se ve por este cuadro que á medida que aumenta la altura del muro, disminuye la relación s del vuelo, pero que crecen al mismo tiempo la del espesor e, así como el volumen total por metro.

Para una altura de $7^m,80$, resulta el muro con las mismas proporciones que tiene en la primera disposición examinada; es decir, que el vuelo de los contrafuertes es un quinto de la altura, el espesor de entrepaño un sexto de la misma, el de los contrafuertes resulta igual á $0^m,975$, y su separación de eje á eje $3^m,90$.

El vuelo de los contrafuertes llega á ser nulo para una altura de $29^m,71$; entonces el espesor toma el valor 0,324 H, que es igual al espesor del muro rectangular tipo. A partir de esta altura los contrafuertes no son ya necesarios.

Esta segunda disposición de los muros con contrafuertes exteriores es más racional que la primera; pero á partir de 8 metros produce mayor volumen de fábrica, y tanto más, cuanto más crecida es la altura. Se ve, pues, que si ésta tiene alguna importancia, serán preferibles los muros sin contrafuertes.

Añadiremos, en apoyo de esta afirmación, que al calcular las presiones en la base, se hallarán éstas, para la segunda disposición, tan crecidas como las correspondientes á la primera. Observaremos, con todo, que pueden disminuirse estas presiones, dando algún talud al entrepaño y al contrafuerte. Así, por ejemplo, con una inclinación de $\frac{1}{10}$ sin cambiar el volumen, es decir, haciendo pasar los nuevos paramentos inclinados por el medio de los primitivos verticales, podrá reducirse la máxima presión en la base á 75.000 kil. por metro cuadrado para una altura de muro de 12 metros. Con la misma altura y taludes de $\frac{1}{5}$ se obtiene 47.000 kilog. próximamente.

Pero debe advertirse que al dar talud al paramento anterior del contrafuerte se aumenta más el terreno ocupado delante del muro, lo que en algunos casos podrá ser un inconveniente que impida adoptar esta disposición.

En resumen, creemos puede decirse que los muros con contrafuertes exteriores dejan de ser ventajosos para alturas superiores á 8 metros. No pasando de esta cifra, será indiferente disponer el muro conforme á las primeras proporciones ó

según las otras. Las primeras son, sin embargo, más sencillas, y dan sin cálculo el vuelo de los contrafuertes.

125. Para atender á las variaciones que pudieran ocurrir en las densidades, en el talud natural de las tierras, en el coeficiente de estabilidad, así como para tener en cuenta las sobrecargas, habría que proceder como sigue.

Hemos obtenido antes (**119**), para calcular el vuelo de los contrafuertes, la expresión

$$s = \frac{1}{a}\left[-\,le + \sqrt{(l^2 - la)\,e^2 + \frac{\delta \text{ tang.}^2\,\beta\,lca}{3\delta'}}\,\right],$$

por lo que vemos que dichas variaciones han de modificar el segundo término del radical. Haciendo en la expresión anterior $e = \frac{1}{6}$, $l = 4^{\text{m}},00$, $a = 1^{\text{m}},00$ y $c = 2$, se obtiene

$$s = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{3} + 0{,}421} = 0{,}203.$$

Si designamos por δ, δ', β, c, los nuevos elementos hallados, distintos de los que hemos adoptado como término medio, habrá que multiplicar el término 0,421 de la fórmula que precede:

por $\dfrac{\frac{\delta}{\delta'}}{\frac{8}{11}}$ para tener en cuenta las nuevas densidades;

por $\dfrac{\text{tang.}^2\,\beta}{\text{tang.}^2\,25^\circ}$, para atender al nuevo ángulo de rozamiento;

por $\dfrac{c}{2}$, para tener en cuenta el nuevo coeficiente de estabilidad;

por $\dfrac{\text{H} + 3h}{\text{H}}$, con motivo de la sobrecarga.

MUROS CON CONTRAFUERTES INTERIORES

126. El problema que hay que resolver para los muros con contrafuertes interiores encierra también cuatro incógnitas. Conservando las mismas denominaciones y suponiendo siem-

pre verticales todos los paramentos, tendremos para el momento del peso del muro de una longitud l, que comprende un contrafuerte;

$$\mathcal{M}\,P = \delta' \left[\frac{H^3 e^2}{2} l + H^2 s \left(\frac{sH}{2} + eH \right) a \right]$$

$$= \delta' H^3 \left(\frac{e^2 l}{2} + \frac{s^2 a}{2} + esa \right);$$

el momento del empuje sobre la misma longitud de muro es

$$\mathcal{M}\,Q = \frac{\delta l \operatorname{tang}^2 \beta}{6} H^3;$$

multiplicando este último momento por el coeficiente de estabilidad, é igualando al momento del muro, formaremos la siguiente ecuación:

$$s^2 + 2es = \frac{\delta l c \operatorname{tang.}^2 \beta}{3\delta' a} - \frac{e^2 l}{a},$$

de donde se deduce

$$s = -e + \sqrt{\frac{\delta l c \operatorname{tang.}^2 \beta}{3\delta' a} - e^2 \left(\frac{l}{a} - 1 \right)}.$$

Haciendo como para los muros con contrafuertes exteriores $a = 1^{m},00$, $l = 4^{m},00$ y $e = \frac{1}{6}$, obtendremos

$$s = -\frac{1}{6} + \sqrt{0,421 - 0,083} = 0,423.$$

Los muros con contrafuertes interiores contienen un nuevo elemento de resistencia del que hablaremos más lejos, y que no existe con otras disposiciones. De aquí resulta que en la práctica puede, sin inconveniente alguno, adoptarse la cantidad 0,40, ó sea los dos quintos, para la relación del vuelo de los

contrafuertes á la altura del muro. Así es que los contrafuertes interiores exigen un vuelo duplo del de los exteriores; en ambos casos el espesor y el intervalo de estos contrafuertes es el mismo, y el grueso del entrepaño igual siempre á $\frac{1}{6}$ de la altura.

El volumen por metro lineal, comprendiendo el de los contrafuertes, será

$$V = H^2\left(e + \frac{sa}{l}\right) = H^2\,(0{,}167 + 0{,}10) = 0{,}267\ H^2.$$

Este resultado hace ver que dicho volumen es mayor que en el caso de hallarse los contrafuertes exteriormente, puesto que entonces no era más que 0,218 H^2.

127. Examinemos también, según lo hicimos antes, si no convendría modificar las proporciones adoptadas entre el espesor del muro, su altura, el espesor y el intervalo de los contrafuertes. Desde el momento en que los contrafuertes se encuentran por la parte interior y envueltos por las tierras, no existe ya interés alguno, bajo el punto de vista del aspecto, en alterar su espesor y su separación; pero puede sí modificarse el espesor del muro, haciéndolo variar en razón directa de la raíz cuadrada de la altura. Estableceremos, pues,

$$eH = \frac{\sqrt{H}}{2} \qquad \text{ó} \qquad e = \frac{1}{2\sqrt{H}},$$

lo cual para una altura de 9 metros da $e = \frac{1}{6}$. La expresión del vuelo se reduce entonces á

$$s = -\frac{1}{2\sqrt{H}} + \sqrt{0{,}421 - \frac{3}{4H}}.$$

Aplicando esta fórmula á distintas alturas, se obtienen los resultados que indica la segunda columna del siguiente cuadro:

NÚMERO 23

CUADRO *de vuelos de los contrafuertes interiores, espesores del muro y volúmenes totales por metro lineal.*

Altura. H	Vuelo de los contrafuertes. sH	Espesor del muro. eH	Volumen total por metro lineal. V
m.	m.	m.	
4,00	0,233 H = 0,932	0,250 H = 1,000	0,308 H^2
8,00	0,395 — = 3,160	0,177 — = 1,416	0,276 —
12,00	0,455 — = 5,460	0,144 — = 1,728	0,258 —
16,00	0,488 — = 7,808	0,125 — = 2,000	0,247 —
20,00	0,508 — = 10,160	0,111 — = 2,220	0,238 —

Con esta nueva disposición se consigue alguna mayor economía para grandes alturas. El espesor del entrepaño es de $\frac{1}{4}$ cuando $H = 4$, y de $\frac{1}{8}$ cuando $H = 16$; el vuelo llega á ser mayor que la mitad de la altura, si ésta alcanza 20 metros.

128. Hemos dicho que los contrafuertes interiores daban lugar á un nuevo elemento resistente del que carecían las demás disposiciones de muro examinadas. Procede esta resistencia del rozamiento que pueden desarrollar las tierras sobre las caras laterales de los contrafuertes, y cuya influencia sobre la estabilidad será tanto mayor, cuanto más elevado sea el muro. En efecto, el rozamiento es proporcional á la presión, ó sea al empuje de las tierras que crece con la altura, y también con el vuelo que asimismo aumenta con dicha altura, en tanto que suponemos invariable la separación de los contrafuertes.

Este elemento de resistencia podría llegar á ser muy considerable si se diese al coeficiente de rozamiento sobre la mampostería el mismo valor que al que corresponde al rozamiento de las tierras sobre ellas mismas; pero puesto que se omite en la cara interior del muro, lógico parece también prescindir del

que se verifica sobre las caras laterales de los contrafuertes. Existe, sin embargo, este último, y por más que puede quedar muy reducido por algunas causas accidentales, es indudable que dicho elemento coloca á los muros de que nos estamos ocupando en mejores condiciones de resistencia.

Además, el cálculo que hemos establecido supone que el entrepaño, así como la cara posterior vertical del contrafuerte, reciben un mismo empuje horizontal, con lo que se admite implícitamente una subdivisión de las tierras por planos verticales formando las prolongaciones de las caras laterales de los contrafuertes. Esta subdivisión no puede verificarse sin vencer cierta resistencia de cohesión que favorece á la estabilidad.

129. Se atribuye á los contrafuertes interiores el inconveniente de ofrecer tendencia á desprenderse del muro; es evidente que si esto se realiza, dejan entonces de contribuir á la estabilidad de la construcción.

Con objeto de hacernos cargo de la importancia de este movimiento, estableceremos que el empuje de las tierras sobre la longitud que tiene el entrepaño se halla contrarrestado con el peso de la longitud de muro comprendida entre los puntos medios de dos entrepaños adyacentes, aumentado con la cohesión de la fábrica en la sección de unión del contrafuerte. Esta cohesión obra con un brazo de palanca $\frac{H}{2}$; tendremos, pues,

$$\frac{Q'H^3}{3}(l-a) = \frac{\delta' e^2 H^3 l}{2} + \frac{aH^3}{2}\gamma,$$

de donde se deduce

$$\gamma = \frac{H}{a}\left[\frac{2Q'(l-a)}{3} - \delta' e^2 l\right].$$

Haciendo $l = 4^m,00$, $a = 1^m,00$, $e = \frac{1}{6}$, y recordando (**72**) que $Q' = 174$ kil., resulta

$$\gamma = 104\,H \text{ kilog.};$$

lo que demuestra que aun para alturas de muro de alguna importancia, el trabajo de la fábrica por extensión no es demasiado considerable.

Si se adopta la segunda disposición, haciendo $e = \frac{1}{2\sqrt{H}}$ y conservando los demás datos, se obtiene

$$\gamma = 348\ H - 2.200;$$

entonces el trabajo de la mampostería por extensión es nulo para alturas inferiores á 6 metros. Es el mismo en los dos casos considerados cuando $H = 9^m,00$. Si la altura llega á 20 metros, el trabajo es en el segundo caso algo superior al doble de lo que corresponde al primero.

Se deduce de los resultados que acabamos de obtener, que no es indispensable emplear los tirantes de hierro que proponen algunos autores, con objeto de asegurar la unión de los contrafuertes con el muro, con tal que se espere á que haya fraguado algún tanto el mortero para echar las tierras.

130. Bajo el punto de vista de la economía de material, la primera de las dos disposiciones de muro con contrafuertes exteriores es más ventajosa que la segunda, sobre todo para grandes alturas. Pero la economía es aún más importante si se compara con el caso de contrafuertes interiores. Sin embargo, para esta última disposición podrá reducirse el volumen, siempre que las circunstancias locales permitan dar talud al paramento exterior del muro. Se conseguirá la reducción haciendo pasar el nuevo paramento inclinado por el punto situado al noveno de la altura del primitivo paramento vertical; la economía obtenida es

$$\frac{7}{18}\,n\,H^2.$$

Limitándonos á un talud de $\frac{1}{10}$, esta expresión da $0,039\ H^2$

y el volumen total tiene por valor

$$V = (0{,}267 - 0{,}039)\ H^2 = 0{,}228\ H^2,$$

lo que se aproxima bastante al volumen 0,217 H^2 que hemos hallado para la primera disposición de muros con contrafuertes exteriores. Cierto es que de este modo se disminuye el espesor del entrepaño; sin embargo, no será de temer su flexión mientras se conserve el espesor de $\frac{1}{6}$ en la sección horizontal situada al noveno de la altura y no pasando del talud de $\frac{1}{10}$, pues no hay que olvidar que los contrafuertes interiores dividen al prisma de máximo empuje y producen un rozamiento lateral que disminuye la acción de las tierras.

131. Examinemos las resistencias al deslizamiento y al aplastamiento.

Para hacernos cargo de la primera de estas dos resistencias, basta observar que el muro con contrafuertes interiores se halla en iguales condiciones de peso y de empuje que un muro con paramento interior vertical y talud exterior comprendido entre 0,1 y 0,2. Se obtendrá, pues, para el primero la misma relación entre el empuje y el peso, $f = 0{,}300$ próximamente, que es relativa al segundo.

En cuanto á la resistencia al aplastamiento, diremos que los contrafuertes interiores acercan el centro de gravedad á la parte posterior, alejándolo de la arista de giro y alejando al mismo tiempo el encuentro de la resultante con la base; esto ha de ocasionar una presión unitaria máxima inferior á la que corresponde á los muros con contrafuertes exteriores.

Nos limitaremos á exponer el resultado del cálculo que hemos aplicado á un muro de 20 metros de altura con paramentos verticales de $\frac{1}{6}$ de espesor, y adicionado con contrafuertes interiores de un metro, cuyo vuelo es $\frac{2}{5}$ de la altura, y que están separados 4 metros de eje á eje.

Se llega á una presión de 8 kilogramos próximamente por centímetro cuadrado, presión que sería aún menor para alturas menos considerables, y también si se diera algún talud al paramento exterior del muro.

En resumen, los contrafuertes colocados del lado de las tierras no ocasionan presiones unitarias tan fuertes como cuando se hallan del lado opuesto, no destruyen la continuidad del paramento visto y no ocupan terreno por delante como los otros, lo que en muchos casos puede ser un inconveniente para adoptarlos. Por fin, la gran presión unitaria en la base, á que están sujetos los muros con contrafuertes exteriores, es un obstáculo para poderlos aplicar á grandes alturas. Estos muros, además, á igualdad de volumen, son más costosos que cuando tienen los contrafuertes interiormente, pues exigen materiales mejor escogidos y una mano de obra más esmerada.

Puede conseguirse con los contrafuertes interiores casi tanta economía de fábrica como con los exteriores, sobre todo si las circunstancias de localidad permiten dar algún talud al paramento visto del muro. Las indicaciones que preceden justifican la gran preferencia que en la práctica se concede á los muros con contrafuertes situados por el lado de las tierras, sobre los que los tienen exteriormente.

MUROS CON CONTRAFUERTES INTERIORES Y BÓVEDAS DE ALIGERAMIENTO

132. Se construyen muros de sostenimiento con contrafuertes interiores unidos entre sí por medio de bóvedas de aligeramiento. A veces estas bóvedas forman una sola hilada ó tanda situada en la parte superior, al efecto de sostener una acera, impidiendo que ceda ésta al asiento de las tierras.

Pero con dicha disposición, que ha sido empleada en los muelles de París, y que en muchos casos puede ser conveniente, solo se utiliza para la estabilidad el peso de la bóveda; exige, además, mayor volumen de fábrica.

Más ventajoso es disponer estas bóvedas, que suelen ser

bastante rebajadas, en varios pisos formando compartimentos que se rellenan con materiales, cuyo peso entra en la ecuación de equilibrio como elemento de resistencia. Hasta cierto punto puede tomarse como empuje del terraplén el que actúa sobre el plano vertical en donde terminan las bóvedas; no se trata ya entonces de un plano ficticio, sino de un plano tanto más real, cuanto que los compartimentos pueden rellenarse con materiales que no ejerzan sobre el muro casi ningún empuje, ya sea que se emplee piedra en seco, ya tierras compactas bien apisonadas.

Así es como determinaremos el empuje. Con objeto de simplificar el cálculo, supondremos que las bóvedas y el relleno forman un macizo de una densidad media δ_1. Conservando las mismas anotaciones anteriores, podrá establecerse la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\delta'\left[\frac{e^2 l H^3}{2} + asH^2\left(\frac{sH}{2} + eH\right)\right] + \delta_1(l-a)sH^2\left(\frac{sH}{2} + eH\right) = \frac{2Q'lH^3}{3},$$

que se reduce á

$$s^2 + 2es = \frac{l}{a} \times \frac{4Q' - 3e^2\delta'}{3\left[\delta' + \left(\frac{l}{a} - 1\right)\delta_1\right]}.$$

De esta ecuación deduciremos el valor del vuelo de los contrafuertes, igual al de las bóvedas, y es

$$s = -e \pm \sqrt{e^2 + \frac{l}{a} \times \frac{4\,Q' - 3e^2\delta'}{3\left[\delta' + \left(\frac{l}{a} - 1\right)\delta_1\right]}}.$$

133. Para aplicar esta expresión, se supondrá que los contrafuertes tienen un grueso de $0^m,80$ y están separados $4^m,00$ de eje á eje; se asignará á las bóvedas un espesor constante de $0^m,50$ en sentido vertical, dejando entre ellas en el mismo sentido, un intervalo de $2^m,50$. En semejantes condiciones y

admitiendo además que se rellenan los vacíos con tierra que pesa 1.600 kilog. por metro cúbico, podremos adoptar para la densidad media δ_1 la cantidad de 1.800 kilog.

Nos queda por fijar el espesor del muro ó de los entrepaños. Este se halla consolidado con las bóvedas, de manera que es menos temible su flexión; así es que consideramos suficiente tomar como espesor $\frac{1}{10}$ de la altura; es decir, que haremos $e = 0{,}1$. El coeficiente de estabilidad c será siempre igual á 2, y el valor de s se convierte en

$$s = -0{,}1 + \sqrt{0{,}01 + 5 \times \frac{4 \times 174 - 660}{3\,(2.200 + 4 \times 1.800)}}$$
$$= -0{,}1 + 0{,}3488 = 0{,}2488.$$

Este resultado indica que disponiendo los contrafuertes y las bóvedas según se ha dicho, y dando á los entrepaños un espesor de $\frac{1}{10}$ de la altura, el vuelo de los primeros es $\frac{1}{4}$ de la misma.

Para determinar el volumen total de mampostería, designaremos por v el espesor de las bóvedas que suponemos constante y de igual vuelo que los contrafuertes, por u la distancia vertical entre las mismas, de eje á eje; el espesor de dichos contrafuertes, será como antes a, y l su separación, también de eje á eje. Tendremos, considerando á las bóvedas como si fueran dinteles,

$$\mathrm{V} = e\mathrm{H}^2 + s\mathrm{H}^2 \frac{a}{l} + s\mathrm{H}^2 \frac{v}{u} \times \frac{l-a}{l},$$

haciendo

$$e = 0{,}1, \quad s = 0{,}25, \quad \frac{a}{l} = 0{,}2, \quad \frac{v}{u} = \frac{1}{6}, \quad \frac{l-a}{l} = 0{,}8,$$

resulta

$$\mathrm{V} = (0{,}10 + 0{,}050 + 0{,}033)\,\mathrm{H}^2 = 0{,}183\,\mathrm{H}^2$$

para el volumen total de fábrica por metro lineal.

Si á la cantidad hallada para el vuelo de los contrafuertes

se añade el espesor del entrepaño, resulta para el grueso total 0,2488 + 0,10 = 0,3488. Es decir, que para oponerse al empuje de las tierras con una resistencia doble de la acción impelente, empleando un macizo formado, según se ha dicho, con mampostería y material de relleno, hay que dar á este macizo, que suponemos de sección rectangular, un espesor algo mayor que el tercio de la altura. Hemos hallado la relación $e = 0,324$ tratándose de un muro rectangular de mampostería en su totalidad; la diferencia procede, como es natural, de la menor densidad del relleno.

134. La misma intensidad de empuje tiene lugar para el muro rectangular de mampostería que para el que está formado con contrafuertes y bóvedas de aligeramiento. Como el peso de este último con su relleno es muy poco inferior al del primero, resulta que la resistencia de deslizamiento será casi igual; aplicando el cálculo se obtiene $f = 0,25$, en vez de $f = 0,21$.

No puede establecerse con tanta sencillez la comparación entre estas dos mismas clases de muros bajo el punto de vista del aplastamiento, á pesar de la igualdad del empuje en ambos casos y de la pequeña diferencia de pesos. Hay que tener presente que la sección horizontal de la mampostería, hecha en el intervalo de las bóvedas, es mucho menor que la sección del macizo total, y que no presenta ya la forma simplemente rectangular, lo cual obliga, para el cálculo de la presión máxima, á emplear la fórmula general (**9**)

$$\rho = P\left(\frac{x_1 x}{I_y} + \frac{1}{\Omega}\right).$$

En esta fórmula P expresa el peso total sobre una longitud l, comprendiendo en este peso el del relleno; Ω representa el área de la sección de la fábrica, es decir, la de un contrafuerte con los semientrepaños adyacentes; I_y su momento de inercia; x_1, la distancia del centro de gravedad de esta sección al punto de paso de la resultante; por último, x indica la abscisa de un punto cualquiera referida al centro de gravedad como origen de coordenadas.

Las presiones límites tendrán lugar en la arista exterior del entrepaño y en la posterior del contrafuerte. Corresponde el máximo al caso en que x_1 y x son de igual signo, y el mínimo cuando los signos son diferentes.

Para aplicar la fórmula anterior, consideraremos varias inclinaciones del entrepaño, cuyos paramentos haremos girar alrededor de los puntos situados al noveno de la altura, pero de modo que conserven siempre su paralelismo (fig. 62); el espesor medido horizontalmente será en todos los casos igual á $\frac{1}{10}$ de la altura. Los contrafuertes presentarán su paramento posterior vertical, con un vuelo de 0,25 H al noveno de la altura; este vuelo, salvo el caso del muro vertical, será, pues, menor en la coronación y algo mayor en la base. Para simplificar el cálculo, supondremos que el conjunto del relleno y de las bóvedas constituye un macizo de una densidad media igual á 1.800 kilog.

El siguiente estado contiene los datos y los resultados del cálculo:

NÚMERO 24

CUADRO *de presiones máxima y mínima en la base de los muros con contrafuertes interiores y bóvedas de aligeramiento.*

Inclinación de los paramentos. $m = \text{tang.}\ \theta$	Fuerzas verticales. P	DISTANCIAS.		Area de la base. Ω	Momento de inercia. I	PRESIONES ρ	
		d	x_1			Máxima.	Mínima.
	K.	m.	m.	m²		K.	K.
0	2760 H²	0,084 H	0,024 H	0,600 H	0,00546 H³	0,5910 H	0,1662 H
0,10 H	2466 —	0,105 —	0,007 —	0,609 —	0,00599 —	0,4375 —	0,3334 —
0,20	2173 —	0,119 —	0,004 —	0,618 —	0,00655 —	0,3859 —	0,3366 —
0,28	1933 —	0,124 —	0,006 —	0,624 —	0,00698 —	0,3531 —	0,3293 —

135. Los resultados de este cuadro indican que cuando la altura del muro es de alguna consideración, se hace preciso inclinar el entrepaño, á fin de no exceder del límite de presión unitaria admitida en la práctica para la mampostería. El máximo de presión se verifica en la arista exterior del muro para las dos primeras inclinaciones, mientras que tiene lugar en la arista de los contrafuertes para las dos últimas. Podría reducirse este máximo tratándose de inclinaciones de 0,20 y superiores, dando talud á la cara posterior de dichos contrafuertes.

Hemos visto (**133**) que el volumen total de fábrica por metro lineal de muro era igual á 0,183 H^2 para el caso de ser vertical el entrepaño. Al inclinarlo se disminuye el volumen á causa de la reducción que sufre el vuelo medio del relleno y de las bóvedas. Pero se concibe que estas últimas, así como el relleno, producen en la mano de obra un aumento de coste del que no debe prescindirse para apreciar el valor económico del perfil. Fijaremos este aumento en 20 por 100 de un volumen de fábrica igual al conjunto de los volúmenes de las bóvedas y del relleno, y que luego se añadirá al volumen efectivo.

Podrá disponerse con estos datos el siguiente cuadro, que indica los volúmenes de mampostería y los valores económicos del muro para diferentes inclinaciones del entrepaño:

NÚMERO 25

CUADRO *de volúmenes de mampostería y valores económicos de los muros con contrafuertes interiores y bóvedas de aligeramiento.*

Inclinación de los paramentos. $m = \text{tang. } \theta$	Volumen efectivo de mampostería. V	Aumento de coste.	Valor económico del perfil.
	m^3	m^3	m^3
0,00	0,183 H^2	0,040 H^2	0,223 H^2
0,10	0,170 —	0,033 —	0,203 —
0,20	0,157 —	0,028 —	0,185 —
0,28	0,147 —	0,022 —	0,169 —

136. Si se compara la última columna de este cuadro con la última del cuadro núm. 15 (**103**), se verá que los muros con contrafuertes interiores y bóvedas de aligeramiento, tales como han sido dispuestos, ofrecen aún mayor economía que los muros en desplome sin bóvedas, sobre todo para las pequeñas inclinaciones de los paramentos. Al aumentar éstas disminuye la diferencia, que queda anulada para un desplome de 0,25 próximamente. Se concibe que así ha de ser, puesto que por un lado se da constantemente al entrepaño un espesor igual á $\frac{1}{10}$ de la altura, mientras que por otro disminuye la relación de espesor con el desplome.

Se observa un resultado económico análogo, aunque con diferencias algo menores, si se establece la comparación entre los mismos muros con bóvedas y los muros sin ellas pero con relleno (cuadro núm. 16). Debe advertirse que en el primero de estos dos sistemas el relleno contenido en las casillas y sostenido por las bóvedas, siempre será susceptible de producir mayor efecto resistente que en el otro sistema, por no estar sujeto á la fábrica.

Hemos fijado en 3 metros la distancia vertical entre eje y eje de las bóvedas; pero se comprende que podrá variarse en la práctica según la superficie que presente el muro en elevación. Será conveniente hacer la distribución de bóvedas sobre la sección vertical de mayor altura (fig. 63), y de modo que entre la más elevada y la coronación pueda extenderse una buena capa de tierra.

Como resumen, podemos establecer que los muros con contrafuertes interiores y bóvedas de aligeramiento, ofrecen grandes ventajas bajo el punto de vista económico, sobre todo cuando las circunstancias de localidad ó del proyecto obligan á dar poco talud al paramento exterior del muro.

MUROS DE ACOMPAÑAMIENTO

137. Los muros de acompañamiento forman las avenidas de los puentes y viaductos. Sostienen el terraplén de un lado

y de otro y presentan la coronación paralela al eje de la vía y al nivel de la misma.

Cuando la latitud de la explanación no es considerable, comprenden entre sí estos muros un volumen de tierra relativamente pequeño; sin embargo, el empuje no es muy inferior al que procede de un terraplén de ancho indefinido, lo que exige que se dé á la fábrica el debido espesor.

Algunos constructores, falsamente imbuídos del principio contrario, han asignado á los muros de acompañamiento espesores insuficientes, á los que deben atribuirse la mayor parte de los numerosos movimientos que se observan en esta clase de construcciones.

Es lo más frecuente disponer estos muros con paramento interior inclinado, ya sea que constituya un solo plano, ya se componga de varios retallos ó escalones. De aquí resulta que si la altura es bastante considerable, estos paramentos acaban por encontrarse en un punto del eje por bajo del cual la fábrica forma un macizo continuo de un lado á otro.

138. Sean ABCD , AB'C'D' (fig. 64), las secciones de dos muros de acompañamiento que se unen en A; sabemos que el prisma de máximo empuje procedente de un terraplén de ancho indefinido y que obra sobre un paramento inclinado AB , está determinado por la bisectriz del ángulo BAM que dicho paramento forma con el talud natural AM de las tierras, ángulo cuyo valor es $90 - \varphi + \theta$. Pero mientras el ángulo $BAB' = 2\theta$ de los dos paramentos, sea inferior á $\frac{1}{2}(90 - \varphi + \theta)$, el prisma de máximo empuje se compondrá de la totalidad del terraplén. El límite superior en que se verifica esta circunstancia está dado por la ecuación

$$2\theta = \frac{1}{2}(90 - \varphi + \theta),$$

de donde

$$\theta = \frac{1}{3}(90 - \varphi).$$

Haciendo, como hasta ahora, $\varphi = 40^\circ$, se obtiene para θ un ángulo de 16° 40′ cuya tangente trigonométrica es 0,30. Más allá de esta inclinación, el prisma de máximo empuje será siempre igual al de un terraplén de ancho indefinido, y el muro exigirá el espesor ordinario.

Si θ es menor, se calculará el empuje por la fórmula [10] (**35**), que se convierte en

$$Q = \delta H^2 \text{tang.}\,\theta \frac{\text{sen.}\,(\alpha - \varphi)}{\text{sen.}\,(2\theta + \varphi)} = \delta H^2 \text{ tang.}\,\theta \frac{\cos.\,(\theta + \varphi)}{\text{sen.}\,(2\theta + \varphi)}.$$

Se supondrá que los paramentos exteriores son verticales, de modo que $n = 0$; tenemos $m = \text{tang.}\,\theta$; y designaremos por e_c la relación del ancho de coronación á la altura.

El brazo de palanca del empuje es

$$H\left(\frac{1}{3\cos.\,\theta} - m \text{ sen.}\,\theta - \text{sen.}\,\theta\, e_c\right) = H\,(A - Be_c).$$

El momento del peso del muro tiene por valor

$$H^3\left(\frac{\delta' m^2}{6} + \frac{\delta' m}{2} e_c + \frac{\delta'}{2} e^2_c\right) = H^3\,(C + De_c + Ee^2_c).$$

Adoptando un coeficiente de estabilidad igual á 2, se podrá establecer la ecuación de equilibrio

$$Ee^2_c + (D + 2Q'B)e_c = 2Q'A - C,$$

de donde se deduce

$$e_c = -\frac{2Q'B + D}{2E} + \sqrt{\left(\frac{2Q'B + D}{2E}\right)^2 + \frac{2Q'A - C}{E}}.$$

Dando sucesivamente á $m = \text{tang.}\,\theta$ los valores 0,15, 0,20, 0,25 y 0,30, se obtendrán las respectivas intensidades de Q', y los valores de los coeficientes A, B, C, D, E, lo que permitirá hallar e_c y formar el cuadro siguiente:

NÚMERO 26

CUADRO *de empujes, de anchos de coronación y anchos medios para los muros de acompañamiento con paramentos exteriores verticales é interiores inclinados que se juntan á una altura* H.

Talud interior. — m = tang. θ	Empuje.	Ancho de coronación.	Ancho medio.
	K.	m.	m.
0,15	189,3 H²	0,232 H	0,307 H
0,20	235,2 —	0,219 —	0,319 —
0,25	253,2 —	0,196 —	0,320 —
0,30	275,0 —	0,166 —	0,316 —

139. Las cifras de la última columna de este cuadro hacen ver que no es posible adoptar para el ancho medio de un muro de acompañamiento, con paramento exterior vertical, una relación mucho menor que la de $\frac{1}{3}$, que corresponde á la latitud del muro rectangular tipo. Si se quiere dar talud al lado exterior, se hará pasar el nuevo paramento por el punto del antiguo situado al noveno de la altura, de conformidad con la regla de transformación de perfiles.

Para hacer el trazado de la sección relativa á dos muros de acompañamiento, hay que empezar por determinar la altura á que se reunen los paramentos interiores.

Para esto, designando por $2a$ el ancho CC′ de la explanación (fig. 65); por c las latitudes de coronación CB, ó C′B′; por n, el talud exterior; por m el interior, y por e la relación del ancho á la altura del rectángulo tipo de igual estabilidad, tendremos las dos ecuaciones siguientes:

$$eH - \frac{8}{9} nH + \frac{1}{2} mH = a;$$

$$c + mH = a,$$

eliminando m entre estas dos ecuaciones, se obtiene

$$H = \frac{\frac{1}{2}(a + c)}{e - \frac{8}{9}n}. \qquad [a]$$

para la expresión de la altura OA que se busca.

Si al aplicar esta fórmula se obtiene un resultado menor que la altura del muro, la diferencia representará la altura del macizo inferior de fábrica, que es continuo de un lado á otro. Si, por el contrario, el resultado es mayor, entonces los dos paramentos interiores estarán separados en la parte inferior.

Por medio de la fórmula que precede, dando sucesivamente á la explanación los anchos de $6^m,00$, $7^m,00$ y $8^m,00$ y haciendo además $c = 0^m,80$, $e = \frac{1}{3}$, se obtendrán los resultados puestos á continuación:

NÚMERO 27

CUADRO *de alturas á que se unen los paramentos interiores inclinados de los muros de acompañamiento.*

Talud exterior. n	ALTURAS PARA UN ANCHO DE EXPLANACIÓN DE $6^m,00$	$7^m,00$	$8^m,00$
	m.	m.	m.
0,00	5,70	6,45	7,20
0,05	6,58	7,44	8,31
0,10	7,77	8,79	9,82

140. Conociendo la altura OA, y después de señalar las extremidades C, C′ de la explanación, y los anchos CB, C′B′ de los muros, se trazarán los paramentos exteriores CD, C′D′

con el talud que se les quiera dar; sobre la horizontal EE′, situada al noveno de la altura, llévense los anchos EF, E′F′ del rectángulo tipo, ó sea el valor eH, y por los puntos F, F′ se levantarán las verticales IL, I′L′; juntando los puntos medios N, N′ de estos verticales con B, B′ respectivamente, se obtienen los parâmentos interiores que deberán encontrarse en el punto A, cuya posición hemos fijado.

141. Dijimos que con frecuencia se disponían los muros de acompañamiento dando talud á los paramentos interiores. Conviene examinar si no sería preferible hacerlos verticales. Es evidente que de un modo análogo á lo que se verifica en el caso anterior, existe también en éste una altura, á partir de la cual la fábrica que está debajo forma un macizo continuo.

Consideremos los muros de acompañamiento dispuestos como indica la figura 66; los paramentos interiores son verticales y los exteriores presentan un talud cualquiera. Sin necesidad de entrar en nuevos cálculos de estabilidad, puede desde luego afirmarse que no será posible disminuir mucho la relación del tercio para la latitud tipo. Designemos como siempre por e esta relación, por a el semiancho de explanación, por H la altura AB, á partir de la cual el macizo de fábrica es continuo, y por n el talud exterior. Los anchos EF, E′F′ tomados al noveno de H son iguales al producto $e \times$ H.

Es evidente que el valor más conveniente para la altura H, será aquel que haga un máximo el área del rectángulo vacío ABB′A′, destinado á recibir el terraplén. Designando por s dicha área, se tiene

$$\frac{s}{2} = (a - \mathrm{CB}) \times \mathrm{H};$$

pero la latitud de coronación CB tiene por valor

$$\mathrm{CB} = \left(e - \frac{8}{9}\, n\right) \mathrm{H},$$

Sustituyendo en la expresión de $\frac{s}{2}$, resulta

$$\frac{s}{2} = aH - \left(e - \frac{8}{9}n\right)H^2.$$

Igualando á cero la derivada de esta expresión con respecto á H, se obtiene

$$a - 2\left(e - \frac{8}{9}n\right)H = 0,$$

de donde

$$H = \frac{a}{2\left(e - \frac{8}{9}n\right)} \qquad [b].$$

Poniendo este valor en la expresión de $\frac{s}{2}$, resulta

$$s = \frac{a^2}{2\left(e - \frac{8}{9}n\right)}.$$

142. Debemos ahora comparar esta área con la del vacío que dejan entre sí los dos paramentos interiores cuando se disponen con talud. Pero este vacío constituye un triángulo, cuya base es $2(a - c)$ y cuya altura [a] ha sido hallada igual á $\frac{a + c}{2\left(e - \frac{8}{9}n\right)}$; tendremos, pues, para esta área, que llamaremos s',

$$s' = \frac{a + c}{2\left(e - \frac{8}{9}n\right)} \times (a - c) = \frac{a^2 - c^2}{2\left(e - \frac{8}{9}n\right)}.$$

Esta expresión de s' es evidentemente menor que la de s;

resulta, pues, que disponiendo los muros de acompañamiento con los paramentos interiores verticales, se consigue alguna mayor economía de fábrica que cuando se da talud á dichos paramentos.

En nuestro sentir, esta última disposición es aún inferior á la otra, en razón á que se presta más á un aumento de empuje debido al agua de lluvia. Claro está que si cierta cantidad de agua, aunque pequeña, se introduce á lo largo del paramento inclinado, desde luego produce el reblandecimiento de la tierra sobre el plano de deslizamiento. Se comprende que este efecto no puede ser tan inmediato cuando el paramento es vertical, puesto que podrá el agua no llegar al plano que limita el prisma de máximo empuje, plano que no es ya entonces el del paramento, sino que está situado en el interior del macizo de tierra.

143. Si se aplica la expresión [*b*] de la altura del vacío relativa al caso de los paramentos interiores verticales, á los tres mismos anchos de explanación que hemos considerado antes, se obtienen los resultados del siguiente cuadro:

NÚMERO 28

CUADRO *de alturas del vacío que comprenden entre sí los muros de acompañamiento con paramentos interiores verticales.*

Talud exterior.	ALTURA PARA UNA EXPLANACIÓN DE		
n	6m,00	7m,00	8m,00
	m.	m.	m.
0,00	4,50	5,25	6,00
0,05	5,19	6,06	6,92
0,10	6,14	7,16	8,19

La expresión [a] que da la altura del vacío en el caso de presentar los paramentos interiores cierto talud, es función

del ancho c, ancho que constituye un dato que hay que fijar de antemano; pero no sucede lo mismo cuando estos paramentos son verticales; entonces la altura [b] es independiente de este ancho, que resulta determinado *á posteriori*. En efecto; en este caso la latitud de coronación es igual al producto $\left(e - \frac{8}{9} n\right) \times H$, y según la segunda expresión [b] de H, este producto equivale á $\frac{a}{2}$. Es decir, que cuando los paramentos interiores de los muros son verticales, dicha latitud es igual á la cuarta parte del ancho de explanación, y por lo tanto, la latitud del rectángulo vacío que ha de recibir el terraplén, es la mitad de la de dicha explanación.

144. Creemos que es muy conveniente tener en cuenta la acción de las sobrecargas al tiempo de fijar la sección de los muros de acompañamiento. Para esto no hay más que tomar el ancho tipo EF de las dos figuras 65 y 66 igual al tercio de la altura del vacío aumentada con la altura de la sobrecarga, ó más generalmente, igual á $e\,(H + h)$. Pero entonces las fórmulas que dan la primera de estas dos alturas se hallan modificadas, según vamos á ver.

Si los paramentos interiores están inclinados, se deduce H de las dos ecuaciones

$$e\,(H + h) - \frac{8}{9}\, nH + \frac{1}{2}\, mH = a$$

$$c + mH = a;$$

eliminando m, resulta

$$H = \frac{(a + c) - 2eh}{2\left(e - \frac{8}{9}\, n\right)} .$$

Cuando los paramentos interiores son verticales, la semi-

área del rectángulo vacío tiene por expresión

$$\frac{s}{2} = \left[a - e\,(\mathrm{H} + h) + \frac{8}{9}\,n\mathrm{H}\right]\mathrm{H}$$

$$= (a - eh)\,\mathrm{H} - \left(e - \frac{8}{9}\,n\right)\mathrm{H}^2;$$

igualando á cero la derivada con respecto á H, se obtiene

$$a - eh - 2\left(e - \frac{8}{9}\,n\right)\mathrm{H} = 0,$$

de donde

$$\mathrm{H} = \frac{a - eh}{2\left(e - \frac{8}{9}\,n\right)}.$$

Para aplicar estas dos expresiones de H, se reemplazará h por la altura de la capa de tierra, cuyo peso es equivalente al de la sobrecarga que se supone uniformemente distribuída; es decir, que podrá hacerse, como hemos propuesto, $h = 1^{\mathrm{m}},00$ para un camino de hierro; $h = 0^{\mathrm{m}},50$ para una carretera.

145. Algunos constructores asignan á los muros de acompañamiento anchos menores que los que se deducen de las reglas que hemos establecido; pero no es posible disminuir los resultados de estas reglas, sin poner la construcción en condiciones de estabilidad inferiores á las que hemos fijado para las demás clases de muro examinadas hasta ahora. Si se quiere obtener mayor economía de mampostería hay que recurrir á otros medios.

Se ha propuesto para esto hacer el relleno entre los muros con piedra en seco, pero debe desconfiarse de este medio, pues puede esta piedra dar lugar á cierto empuje. Creemos preferible el sistema que hemos empleado con buen éxito en algunas construcciones importantes; se reduce á dejar sin rellenar el intervalo entre los dos muros, recubriéndolo con una bóveda

longitudinal, y cerrando también la extremidad de este intervalo con un muro vertical ó tabique. Hay que establecer la bóveda á un nivel por bajo de la explanación que permita recubrirla con una buena capa de tierra.

Podrá fijarse el espesor del tabique por medio de la fórmula

$$E = \frac{D\sqrt{H}}{7},$$

en la que D representa la longitud del tabique ó el intervalo entre los dos muros y H la altura.

Esta fórmula es análoga á la que se ha dado al tratar de los muros con contrafuertes exteriores (**122**), y se deduce de los mismos principios, admitiendo unos 4.000 kil. por metro cuadrado para el trabajo de la mampostería.

Puede emplearse también esta misma fórmula, cuando se quiera determinar el grueso de los tabiques que cierran, por la parte del terraplén, la extremidad de las bóvedas longitudinales de aligeramiento que se colocan sobre los riñones de algunos puentes importantes.

MUROS DE REVESTIMIENTO

146. Suelen llamarse muros de revestimiento los que tienen su coronación á un nivel menos elevado que las tierras que sostienen. Se concibe que estos muros pueden ofrecer diferentes perfiles. En el capítulo II se vió la manera de calcular el empuje de las tierras y de establecer la ecuación de equilibrio en el caso más general.

Como aplicación de los principios expuestos, solo trataremos aquí de las disposiciones más sencillas que con más frecuencia se presentan en la práctica, y cuyos resultados puedan traducirse por medio de fórmulas poco complicadas.

Supondremos primero que el muro debe sostener el talud de un gran terraplén, y que este talud arranca de la arista interior de la coronación, extendiéndose por encima á mucha altura. Dispondremos verticalmente el paramento interior del muro;

se dará al talud BX (fig. 67) una inclinación de 3 de base por 2 de altura, que es la que generalmente se adopta, y corresponde á un ángulo de 33° 41′ con el horizonte. Admitiremos siempre los mismos datos medios de 40° para el talud natural de las tierras y 1.600 kil. para el peso del metro cúbico de éstas.

Con motivo de la verticalidad del paramento interior, el ángulo BAH $= \alpha + \beta$, es recto, y la fórmula [11], que da el empuje máximo (**35**), se convierte en

$$Q = \frac{\delta}{2} \overline{AX'}^2.$$

Sabemos como se determina gráficamente la longitud AX′, que es media proporcional entre OA y OK′; el punto K′ queda fijado por el encuentro de BK′ paralelo á AM con la recta AO, que forma con AB un ángulo de 40° $= \varphi$.

Pero nos proponemos calcular AX′, y para esto observaremos que tomando la altura AB por unidad, se verifican sucesivamente las siguientes relaciones:

$$OA = \frac{\text{sen. OKA}}{\text{sen. KOA}} = \frac{\text{sen. } 56°19'}{\text{sen. } 83°41'} = 0,8371;$$

$$OK = \frac{\text{sen. OAK}}{\text{sen. KOA}} = \frac{\text{sen. } 40°}{\text{sen. } 83°41'} = 0,6467;$$

$$OK' = OK \text{ sen. OKK}' = 0,6467 \text{ sen. } 6°19' = 0,071137;$$

$$OX' = \sqrt{OA \times OK'} = \sqrt{0,8371 \times 0,071137} = 0,244;$$

$$AX' = OA - OX' = 0,8371 - 0,244 = 0,5931.$$

Por último, el empuje para una altura igual á la unidad, es

$$Q' = \frac{\delta}{2} \overline{AX'}^2 = 800^{k.} \times \overline{0,5931}^2 = 281^{k.},4136,$$

El momento de este empuje que es horizontal, tiene por valor

$$\mathcal{M}\,.\,Q' = \frac{1}{3} \times 281^{k.},4136 = 93,8.$$

Suponiendo que el muro presenta una sección rectangular, si admitimos además un coeficiente de estabilidad igual á 2, podremos establecer la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\frac{\delta'}{2} e^2 = 2 \times 93,8,$$

de donde se deduce, haciendo $\delta' = 2.200$ k.,

$$e = \sqrt{\frac{187,6}{1100}} = 0,413,$$

ó en números redondos $e = 0,41$; lo que indica que el muro debe tener un grueso próximamente igual á los dos quintos de la altura.

Podrá conseguirse economía de mampostería dando talud al paramento exterior, que se trazará haciéndolo pasar por el punto del antiguo vertical situado al noveno de la altura.

147. Cuando las tierras cubren la coronación del muro, exige éste aún mayor espesor.

Sea H la altura AM (fig. 68); designemos por h la prolongación MB del paramento interior hasta el talud de las tierras. Si se hace $CB = 0,41\,(H + h)$, un macizo rectangular de mampostería, cuya sección fuese ABCD, resistiría convenientemente al empuje. Pero si el muro no llega más que hasta M, habrá que darle un espesor mayor, tal como EM, para que el momento de la sección AMEF sea igual al momento de ABCD.

Designando por e y e' las relaciones de los anchos CB y EM á las respectivas alturas AB y AM, tendremos

$$e'^2 H^3 = e^2\,(H + h)^3,$$

de donde se deduce

$$e'H = e\,(H + h)\sqrt{\frac{H + h}{H}}\;;$$

pero la altura h es igual á los $\frac{2}{3}$ del ancho de coronación; tomando para este ancho 0,45 H, resulta $h = 0{,}30\ H$, y por lo tanto,

$$e'H = e\,(H + h)\sqrt{1{,}30} = 1{,}14\ e\,(H + h);$$

habiendo hallado $e = 0{,}413$, resulta

$$e'H = 0{,}47\ (H + h).$$

La relación e ha aumentado desde 0,41 hasta 0,47; pero como no se ha tenido en cuenta el peso del triángulo de tierra que carga sobre el muro y aumenta la estabilidad, puede limitarse á tomar 0,45 $(H + h)$ para la latitud EM de coronación.

Haciendo como más arriba $h = 0{,}30\ H$, se obtiene

$$e'H = 0{,}585\ H \qquad ó \qquad e' = 0{,}585.$$

Puede, pues, fijarse el ancho del muro tomando 0,45 de la altura AB ó 0,585 de AM.

148. Los resultados que acabamos de obtener para el caso en que las tierras cubren la coronación del muro, así como cuando arrancan de la arista interior de esta coronación, suponen que el plano de rotura relativo al prisma de tierra que da el máximo empuje corta al talud del terraplén, lo cual exige que la explanación se halle suficientemente elevada.

Tratemos de indagar qué minima altura de tierra debe existir sobre la coronación para que esta intersección se verifique. Basta para ello calcular XL (fig. 67). El paralelismo de las rectas KX′, XA, da

$$\frac{KX}{X'A} = \frac{OK}{OX'},$$

de donde resulta, reemplazando las longitudes por sus valores, que han sido ya calculados,

$$KX = \frac{X'A \times OK}{OX'} = \frac{0,6467 \times 0,5931}{0,244} = 1,57.$$

Se halla, por último,

$$LX = KX \text{ sen. } XKL = 1,57 \times \text{sen. } 33^{\circ}\ 41' = 0,87.$$

Este resultado hace ver que cuando la distancia vertical que media entre la explanación de la vía y la coronación del muro es superior á 0,87 de la altura de este muro, el empuje es siempre el mismo, cualquiera que sea dicha distancia; por lo tanto, el valor $e'H = 0,585\ H$, da el mayor espesor necesario.

Si la altura de la explanación sobre el muro no llega á $0,87\ H$, el empuje es menor y se calcula siempre por la fórmula

$$Q = \frac{\delta}{2}\, \overline{AX'}^2,$$

suponiendo que el paramento interior del muro es vertical.

Se obtiene AX' por medio del procedimiento gráfico explicado en el capítulo II y que recordaremos en pocas palabras. Hay que empezar por fijar el punto K (fig. 69), por medio de BK, paralela á AC, lo que determina la equivalencia de los dos triángulos ABC, AKC; se traza luego KK' paralelo á AM, y no queda más que determinar OX' dándole un valor medio proporcional entre OA y OK'. El punto de aplicación del empuje se obtiene con la suficiente aproximación proyectando sobre AB, y paralelamente á AX, el centro de gravedad del cuadrilátero ABCX, lo que permite obtener el momento de este empuje y establecer la ecuación de equilibrio, de la cual ha de deducirse el espesor del muro.

149. No llevaremos más adelante este examen; basta saber

que en el caso actual este espesor es menor. Pero sí trataremos de fijar fórmulas sencillas que den el espesor del muro rectangular para todas las posiciones de la explanación por encima de la fábrica.

Hemos hallado la cantidad 0,585 para el mayor valor que hay que dar á la relación e; si designamos por H' la altura de las tierras sobre la coronación, este valor de e corresponderá á $H' = 0,87\ H$ y á todas las alturas superiores. Para las que sean inferiores, creemos poder asignar á e los resultados deducidos de la fórmula empírica

$$e = \frac{1}{3} + 0,3\frac{H'}{H}, \qquad [53]$$

lo cual da $e = \frac{1}{3}$ para $H' = 0$; y $e = 0,59$ para $H' = 0,87\ H$; pero el valor $e = 0,59$ constituirá un límite superior del que no hay que pasar.

Consideramos oportuno comparar los espesores procedentes de la expresión que antecede, con los que se obtienen al aplicar la fórmula dada por *Poncelet*, la cual, adoptando nuestras anotaciones, puede escribirse como sigue:

$$eH = 0,845\ (H + H')\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\ (90 - \varphi)\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}}\ .$$

Tomaremos siempre los mismos datos medios, que son:
$\varphi = 40^0$ para el ángulo del talud natural de las tierras;
$\delta = 1.600$ kilog. para el peso del metro cúbico de tierra;
$\delta' = 2.200$ íd. íd. íd. de mampostería;
y formularemos el siguiente cuadro comparativo, en el que se ha llevado la relación $\frac{H'}{H}$ hasta el límite 0,87.

NÚMERO 29

CUADRO *comparativo de los espesores de los muros de revestimiento rectangulares, dados por la fórmula propuesta y por la fórmula de Poncelet.*

$\frac{H'}{H}$	ESPESORES SEGÚN LA	
	Fórmula propuesta.	Fórmula de Poncelet.
	m.	m.
0,00	0,333 H	0,336 H
0,20	0,393 —	0,403 —
0,40	0,453 —	0,470 —
0,60	0,513 —	0,537 —
0,80	0,573 —	0,600 —
0,87	0,594 —	0,628 —

Los espesores obtenidos con nuestra fórmula son ligeramente inferiores á los que propone Poncelet; pero admitimos que las tierras solo cubren un ancho de coronación de 0,45 H, mientras que para un muro rectangular este ancho podrá ser 0,59 H. En la mayoría de los casos convendrá dar cierto talud de 0,1 á 0,2 al paramento exterior, lo que hará disminuir la latitud superior.

150. Si el talud de las tierras arranca de la arista interior de la coronación, se calculará el espesor del muro rectangular por medio de la fórmula

$$e = \frac{1}{3} + 0{,}1 \frac{H'}{H}. \qquad [54]$$

La relación $\frac{H'}{H}$ tendrá por límite superior la cantidad 0,87; entonces el valor de e resulta igual á 0,42, que es poco más ó menos lo que hemos encontrado para este caso.

Cuando las tierras cubran sólo en parte la coronación, se

reemplazará en las fórmulas [53] y [54] el coeficiente de $\frac{H'}{H}$ por otro comprendido entre 0,1 y 0,3.

151. Las relaciones e de espesor que dan nuestras fórmulas se refieren á una sección rectangular; por lo tanto, para disponer el paramento exterior con talud se inclinará lo necesario, haciéndolo girar alrededor del punto situado al noveno de la altura del muro, á partir de abajo. Se obtiene con esto tanta mayor economía, cuanto más considerable sea esta inclinación.

De la misma manera, si se quiere disponer el paramento interior con desplome, lo que dará lugar aún á mayor economía, se hará girar este paramento alrededor del punto que se halla á 0,7 de la altura á partir de la base.

La trasformación del perfil rectangular en otro con talud exterior, y por el lado opuesto con desplome ó sin él, produce una gran disminución en la latitud de coronación; por lo tanto, si las tierras cubren por completo esta nueva latitud, el coeficiente de $\frac{H'}{H}$ deberá estar comprendido entre 0,1 y 0,3. En general, si aH representa el ancho que ocupan las tierras sobre la fábrica, dicho coeficiente se deducirá de la expresión

$$0,1 + 0,2 \times \frac{a}{0,45},$$

y la fórmula [53] que expresa la relación de espesor que debe asignarse al rectángulo tipo, es entonces

$$e = \frac{1}{3} + \left(0,1 + 0,2\,\frac{a}{0,45}\right)\frac{H'}{H}. \qquad [55]$$

Vimos que si el talud del terraplén arranca de la arista interior de coronación y es además indefinido, el ancho del rectángulo tipo era igual á 0,42 H; por lo tanto, se tendrá en este caso para la relación de latitud media de un muro con

talud exterior n, reemplazando en las fórmulas [49] (**97**) y [51] (**108**) $\frac{1}{3}$ por 0,42,

$$e_m = 0,42 - \frac{7}{18} n, \qquad [56]$$

si el paramento interior es vertical ó con talud; y

$$e_m = 0,42 - 0,6\, n, \qquad [57]$$

tratándose de un muro en desplome y caras paralelas.

Para tener en cuenta la sobrecarga que puede existir sobre el terraplén, se añade á éste la capa de tierra de un grueso h, representativa de dicha sobrecarga; es decir, que en las dos expresiones de e se reemplazará $\frac{H'}{H}$ por $\frac{H' + h}{H}$, tomando siempre por limite superior de esta última relación la cantidad 0,87, según la posición de las tierras sobre la coronación del muro.

Podrá también atenderse á las variaciones de densidades y del ángulo de rozamiento de las tierras, de una manera semejante á lo que hemos explicado ya al tratar de los muros de sostenimiento.

Lo mismo que sucede con estos últimos muros, se verifica también para los de revestimiento, en lo que concierne al talud del paramento interior. En unos, como en otros, la inclinación de este paramento, lejos de producir economía de fábrica, da lugar á un aumento de volumen en el macizo de fundación, en virtud de la mayor latitud de base.

152. Conviene examinar ahora las resistencias que presentan los muros de que nos estamos ocupando á los dos movimientos de deslizamiento y de aplastamiento; se concibe desde luego que la primera de estas dos resistencias ha de ser inferior á la análoga de los muros de sostenimiento, en atención al menor empuje que sobre éstos ejercen las tierras.

Nos limitaremos á considerar el caso en que el talud del

terraplén es indefinido. El ancho del muro será 0,59 H; se supondrá además que las tierras cubren la coronación sobre una latitud de 0,45 H, con lo que resulta $h = 0,30$ H.

El empuje sobre el paramento interior vertical prolongado hasta el citado talud es, en este caso, según se desprende del valor hallado para Q' (**146**),

$$Q = 281,4 \times (1,3\ H)^2 = 475,6\ H^2;$$

dando diversas inclinaciones al paramento exterior, y dejando siempre vertical el interior, podrá calcularse el peso del muro y formar las relaciones entre el empuje horizontal y este peso, según indica el siguiente cuadro:

NÚMERO 30

CUADRO *de relaciones entre el empuje y la carga para los muros de revestimiento con talud exterior.*

Talud exterior. n	Peso del muro. P	Relaciones $\frac{Q}{P}$
	k.	
0,00	1.298 H^2	0,366
0,10	1.212 —	0,392
0,20	1.127 —	0,422

Estas relaciones son un poco mayores que las obtenidas para los muros de sostenimiento; sin embargo, no deberá temerse el deslizamiento con tal que el suelo de la fundación no sea arcilloso y húmedo.

153. Se obtendrá la presión máxima en la base del muro, empleando las fórmulas del trapecio, y después de haber determinado la distancia de la resultante á la arista de giro.

Esta distancia se calcula por medio de la fórmula

$$d = \frac{\mathcal{M}\,P - \mathcal{M}\,Q}{P},$$

debiendo poner en ella los valores de P, $\mathcal{M}$P, y $\mathcal{M}$Q, que son:

$$P = \left(\frac{n}{2} + 0{,}59 - \frac{8}{9}\,n\right) \delta' H^2 = (0{,}59 - 0{,}3888\,n)\,\delta' H^2$$

$$\mathcal{M}\,P = \left[\frac{n^2}{3} + \left(0{,}59 - \frac{8}{9}\,n\right)\left(n + 0{,}295 - \frac{4}{9}\,n\right)\right] \delta' H^3$$
$$= (0{,}17405 + 0{,}0655\,n - 0{,}1605\,n^2)\,\delta' H^3$$

$$Q = 281{,}4\,(1{,}3\,H)^2 = 475{,}6\,H^2$$

$$\mathcal{M}\,Q = \frac{281{,}4}{3}\,(1{,}3\,H)^3 = 206{,}0786\,H^3;$$

resulta con la sustitución

$$d = \frac{0{,}08036 + 0{,}0655\,n - 0{,}1605\,n^2}{0{,}59 - 0{,}3888\,n} \times H.$$

Como las distancias son menores que el tercio del ancho de base, habrá que calcular la presión máxima con la segunda de las dos fórmulas del trapecio

$$\rho = \frac{2}{3}\;\frac{P}{d}\,.$$

Los resultados se expresan en el siguiente cuadro:

NÚMERO 31

CUADRO *de presiones máximas por centímetro cuadrado, en la base de los muros de revestimiento.*

Talud exterior. n	Distancia de la resultante. d	Presión máxima. ρ
	m.	k.
0,0	0,137 H	0,6316 H
0,1	0,154 –	0,5246 –
0,2	0,176 –	0,4269 –

Las presiones son mayores que las análogas relativas á los muros de sostenimiento, y demuestran la necesidad de dar talud al paramento exterior, especialmente cuando la altura del muro es de alguna importancia, á fin de no pasar de la mayor carga unitaria que se ha convenido adoptar en la práctica.

Advertiremos, además, que en los cálculos que preceden no se ha tenido en cuenta el peso del pequeño triángulo de tierra situado sobre la coronación del muro; por lo tanto, en rigor la resistencia, ya sea al deslizamiento, ya al aplastamiento, es algo superior á lo que se deduce de los dos estados que anteceden.

MUROS EN ALA

154. El mismo objeto tienen los muros en ala que los de acompañamiento, y consiste en sostener las tierras en las avenidas de los puentes, impidiendo que invadan la corriente. Existe empero una notable diferencia entre estas dos clases de muros, pues mientras que los segundos están dispuestos paralelamente al eje del camino, y con la coronación de nivel con el piso del mismo, los primeros presentan una dirección distinta, y terminan por la parte superior en los mismos planos forma-

dos por los taludes del terraplén, de modo que su altura varía, desde la que tiene la explanación, en la parte contigua al estribo, hasta ser casi nula en el extremo opuesto.

Si se da un corte vertical perpendicular al muro en ala, se obtiene sobre el talud de las tierras una intersección rectilínea formando cierto ángulo con el horizonte, salvo el caso poco frecuente en que este muro es normal al eje de la vía, de modo que por lo regular los muros en ala pueden considerarse como muros de revestimiento.

Admitamos que la dirección del muro forma con los planos de frente del puente un ángulo de 26° 34', lo que corresponde á una separación con la normal á estos planos de medio por uno, y constituye una disposición que se observa con frecuencia. La intersección con el talud de las tierras del plano vertical perpendicular al muro en ala dará lugar á una línea con pendiente de 16° 42'. Si partiendo de este dato, se aplican los cálculos expuestos para los muros de revestimiento, se hallará para la relación del ancho necesario, correspondiente á una sección rectangular, el valor

$$e = 0{,}35$$

que difiere poco del tercio.

Puede adoptarse perfectamente esta relación de $\frac{1}{3}$, aplicándola á la sección más elevada contigua al plano de frente, en donde el muro en ala se encuentra consolidado con el estribo de la bóveda. Habrá siempre un exceso de resistencia para el resto del muro, puesto que éste en su extremidad inferior exigirá por lo menos la latitud necesaria para apoyar las losas que forman la coronación en rampa.

Creemos también que será conveniente disponer verticalmente el paramento interior de los muros en ala, por las mismas razones indicadas al tratar de los de sostenimiento. Si se quiere dar talud al paramento visto, se modificará el rectángulo con arreglo á la ley de trasformación de perfiles, es

decir, que la sección del muro inmediata á los planos de frente deberá tener, al noveno de su altura, un grueso igual al tercio de la misma.

ZARPA DE LOS CIMIENTOS

155. Cuando una construcción de mampostería no se halla sometida más que á fuerzas verticales cuya resultante pasa por el centro de gravedad de su base, el macizo de fundación debe presentar alrededor de dicha base una zarpa de igual latitud. Se trata así de aumentar la superficie de contacto con el suelo, y disminuir, por consiguiente, la presión unitaria. El ancho de esta zarpa se determina fácilmente conociendo la resistencia del terreno.

Pero si existen además fuerzas oblicuas, la resultante deja de pasar por el centro de la base, y se concibe que la zarpa podrá convenir más de un lado que de otro. Así, por ejemplo, vimos que en los muros de sostenimiento con talud el punto de intersección de la resultante se encontraba á una distancia de la arista de giro menor que el tercio del ancho de la base; será, pues, inútil dar zarpa á la cimentación del lado de las tierras; convendrá, por el contrario, establecerla por el lado opuesto, en donde la presión es importante.

La zarpa exterior debe, además, tener otro objeto: es preciso oponerse con ella á que el macizo de fábrica ofrezca más tendencia á girar alrededor de la arista inferior de la fundación, que alrededor de la arista que forma la base del muro, y debe impedirse esto con tanto más motivo, siempre que el suelo sobre que descansa el cimiento no esté formado por roca maciza, puesto que la mampostería no tiene entonces ninguna adherencia con el terreno.

156. Examinemos las nuevas condiciones de equilibrio relativas al movimiento que se trata de contrarrestar.

Sea ABCD (fig. 70), la sección de un muro con talud exterior, fundado sobre un macizo rectangular EFLA, cuya cara posterior se halla en el mismo plano vertical del paramento in-

terior del muro, y considérese el giro alrededor de la arista proyectada en F. El empuje de las tierras será el mismo; pero su brazo de palanca habrá tenido un incremento igual á la altura de la fundación. El brazo de palanca del peso del muro habrá crecido también del ancho de la zarpa. Debe, pues, expresarse que el momento del macizo de fundación, mas lo que ha aumentado el momento del peso del muro, será igual al aumento sufrido por el empuje de las tierras multiplicado por 2, admitiendo que se quiere conservar la misma estabilidad.

Se prescinde del empuje de las tierras sobre la cara EF de la fundación, pues no merece tomarse en cuenta.

Designemos por t la relación del ancho DE de la zarpa á la profundidad AL de la fundación, y por u la relación de esta profundidad á la altura AB del muro, de manera que se verifica $AL = u \times H$, y $ED = t \times AL = tuH$. Se representará como siempre por e la relación del ancho al noveno.

La latitud media del muro es $\left(e - \frac{7}{18} n\right) \times H$, y la latitud de la base tiene por expresión $\left(e + \frac{1}{9} n\right) \times H$; el momento del macizo de fundación será

$$\frac{\delta'}{2}\left[\left(e + \frac{1}{9} n\right) H + tuH\right]^2 \times uH;$$

el incremento que experimenta el momento del peso del muro está expresado por

$$\delta' \left(e - \frac{7}{18} n\right) H^2 \times tuH;$$

en fin, el momento del empuje crece de una cantidad, cuyo duplo es

$$2Q'H^2 \times uH.$$

Igualando esta última expresión á la suma de las dos que la

preceden y ordenando con respecto á t, resulta

$$t^2 + 2\,\frac{e\,(1+u) - n\left(\frac{7}{18} - \frac{u}{9}\right)}{u^2} \times t$$

$$= \frac{\frac{4Q'}{\delta'} - \left(e + \frac{1}{9}n\right)^2}{u^2};$$

haciendo $Q' = 174^{k.}$, $e = 0{,}324$ (véanse los cuadros 4 y 5) (**72**) y (**73**), y dando diferentes valores á la relación u, así como al talud exterior n, se obtienen los resultados indicados en el siguiente cuadro:

NÚMERO 32

CUADRO *de latitudes de zarpa para los cimientos de los muros con talud.*

Talud exterior. n	ANCHO DE ZARPA POR METRO DE PROFUNDIDAD PARA LAS RELACIONES				
	$u = \frac{1}{10}$	$u = \frac{1}{4}$	$u = \frac{1}{2}$	$u = \frac{3}{4}$	$u = 1$
	m.	m.	m.	m.	m
0,00	0,29	0,27	0,21	0,17	0,15
0,10	0,32	0,28	0,21	0,17	0,15
0,20	0,35	0,29	0,22	0,18	0,15

Hay que dar, pues, á estos muros una zarpa cuya latitud varíe entre $0^m,15$ y $0^m,35$ por cada metro de profundidad del cimiento, y según sea la relación de esta profundidad á la altura del muro. Pero debe tenerse presente que admitimos la hipótesis de no existir adherencia, en el fondo de la cimentación, entre el terreno y la fábrica,

157. No es necesario fijar esta zarpa de una sola vez, como lo supone el cálculo; podrá distribuirse la total latitud en varios escalones ó retallos (fig. 71). Se suprime con esto un poco de mampostería del lado exterior, pero su momento de giro es muy pequeño; se halla además esta mampostería reemplazada por las tierras que se encuentran encima.

La zarpa ó aumento de ancho que se da á los cimientos produce un reparto más uniforme de presión sobre el suelo, disminuyendo al mismo tiempo la máxima carga á que está sometida la unidad superficial. Pero en ciertos casos podrá no ser suficiente esta disminución, y exigir mayor ancho de zarpa que el que indica el cuadro anterior. Todo dependerá de la resistencia que ofrezca el terreno, resistencia á la que especialmente debe atenderse al proyectar una construcción semejante.

158. Los muros en desplome, dada su disposición particular, merecen también estudiarse bajo el punto de vista de la zarpa de cimentación.

Supondremos rectangular la sección vertical de los cimientos, y además que el lado interior del rectángulo parte de la arista inferior de la cara en desplome del muro (fig. 72). Este es de igual ancho, y el momento de su peso crece de una cantidad

$$\delta' e\mathrm{H}^2 \times tu\mathrm{H};$$

el momento relativo al peso de la fundación puede expresarse como sigue:

$$\delta' \left(\frac{e\mathrm{H} + tu\mathrm{H}}{2} \right)^2 \times u\mathrm{H};$$

el brazo de palanca del empuje crece de la longitud

$$\mathrm{TS} = tu\mathrm{H} \text{ sen. } \theta + u\mathrm{H} \cos. \theta;$$

por lo tanto, el mayor valor que toma el momento de este

empuje será

$$Q'H^2 (tuH \text{ sen. } \theta + uH \cos. \theta).$$

Hay que establecer la igualdad entre el doble de esta expresión y la suma de las dos que la preceden, con lo que resulta

$$t^2 + \frac{2e(1+u) - \frac{4Q'}{\delta'} \text{ sen. } \theta}{u^2} \times t = \frac{\frac{4Q'}{\delta'} \cos. \theta - e^2}{u^2}.$$

Dando á e, á Q' y á θ los valores indicados en los cuadros relativas á los muros en desplome para diversas inclinaciones de los paramentos, y son:

para $n = 0{,}1$ $\begin{cases} e = 0{,}264 \\ Q' = 146^{k.} \\ \theta = 5^{\circ}\,42' \end{cases}$ para $n = 0{,}2$ $\begin{cases} e = 0{,}205 \\ Q' = 121^{k.} \\ \theta = 11^{\circ}19' \end{cases}$ para $n = 0{,}3$ $\begin{cases} e = 0{,}154 \\ Q' = 98^{k},24 \\ \theta = 16^{\circ}\,42' \end{cases}$

se obtendrán los resultados siguientes:

NÚMERO 33

CUADRO *de latitudes de zarpa para los cimientos de los muros en desplome.*

Inclinación. n	LATITUD DE ZARPA POR METRO DF PROFUNDIDAD Y PARA LAS RELACIONES				
	$u = \frac{1}{10}$	$u = \frac{1}{4}$	$u = \frac{1}{2}$	$u = \frac{3}{4}$	$u = 1$
	m.	m.	m.	m.	m.
0,10	0,35	0,30	0,24	0,19	0,16
0,20	0,42	0,35	0,27	0,21	0,18
0,30	0,50	0,41	0,30	0,24	0,19

Estas latitudes son algo mayores que las halladas para los muros con talud, sobre todo cuando el desplome tiene mucha

inclinación. Podrá también repartirse en varios retallos la totalidad de la zarpa; la parte opuesta del cimiento se dejará con paramento vertical, y aun si fuese necesario, se le daría cierto talud, con el objeto de disminuir la máxima presión unitaria que, según sabemos, para los muros en desplome y en la mayoría de los casos, cae en la parte interior. Esto sucede cuando el desplome es de 0,2 ó más. La figura 73 indica la citada disposición.

159. Los resultados de los dos cuadros que anteceden dan una idea bastante aproximada de la importancia de los anchos de zarpa para toda clase de muros de sostenimiento. Además, creemos suficientes los cálculos que han servido de base á estos cuadros, para hacerse cargo de la marcha que hay que seguir en todos los casos.

Pero no deberá nunca perderse de vista la determinación de la carga unitaria máxima sobre el terreno, á fin de que su valor no exceda de lo que éste pueda soportar. Dicha carga dependerá, principalmente, de la posición del punto de paso de la resultante en la base del cimiento, posición que se obtiene siempre por medio de la fórmula

$$d = \frac{\mathcal{M}\,\Sigma P - \mathcal{M}\,Q \cos. \theta}{\Sigma P},$$

en la cual el primer término del numerador representa la suma de momentos de todas las fuerzas verticales, comprendiendo en ellas además, del peso del muro, el peso del macizo de fundación y la componente vertical del empuje. El segundo término es el momento de la componente horizontal de este empuje. Por último, el denominador indica la suma de dichas fuerzas verticales.

MUROS EN MEDIA LADERA

160. Cuando un muro sostiene un terraplén colocado á media ladera, sucede que la altura sobre el terreno del paramento interior es menor que la del paramento opuesto. Si

se fija la latitud del muro con arreglo á la primera de las dos alturas, resulta una dimensión insuficiente para oponerse debidamente al giro alrededor de la arista inferior E del paramento visible (fig. 74). Si, por el contrario, se adopta la altura exterior CE, se llega á un espesor que parece excesivo, puesto que el prisma de máximo empuje tiene menor elevación.

A fin de saber á qué atenerse, considérese la rotación del muro ECBF alrededor de E, y con este objeto designemos por H la altura interior AB; por ε el ángulo del terreno con el horizonte; por e la relación del ancho necesario á la altura H. Tendremos $CE = H + eH \text{ tang. } \varepsilon$, y para el momento del peso de la fábrica

$$\delta' \frac{e^2H^2}{2} (H + eH \text{ tang. } \varepsilon).$$

El brazo de palanca del empuje es $\frac{H}{3} + eH \text{ tang. } \varepsilon$, y su momento

$$Q'H^2 \left(\frac{H}{3} + eH \text{ tang. } \varepsilon \right).$$

Estableciendo la igualdad entre el duplo del último momento y el que le precede, y ordenando con respecto á e, se llega á la ecuación de equilibrio

$$e^3 + \frac{e^2}{\text{tang. } \varepsilon} - \frac{4Q'}{\delta'} e = \frac{4Q'}{3\delta' \text{ tang. } \varepsilon}.$$

Es sabido que $Q' = 174^k$, dando á ε distintos valores, se obtienen los siguientes resultados:

$$\text{para tang. } \varepsilon = \frac{1}{4}, \; e = 0{,}350$$

$$\text{— tang. } \varepsilon = \frac{1}{2}, \; e = 0{,}375$$

$$\text{— tang. } \varepsilon = \frac{3}{4}, \; e = 0{,}395.$$

La distancia BF será, pues,

$$BF = \frac{e}{0,40} = 0,81$$

y resulta $FA = 1 - 0,81 = 0,19$.

Supongamos que la superficie de rotura sea plana, el momento del empuje sobre BF tomado con respecto á D, será

$$Q' \overline{BF}^2 \times \left(\frac{BF}{3} + FA\right) = 52,51,$$

y el momento del peso del macizo FBCDE referido al mismo punto D, tiene por valor

$$\delta' \frac{e^2}{2} - \delta' \frac{EA \times AF}{2} \left(DE + \frac{2EA}{2}\right) = 110,38.$$

La relación de estos momentos da para el coeficiente de estabilidad

$$c = \frac{110,38}{52,51} = 2,10.$$

Se ve que este coeficiente es algo mayor que 2, y que la estabilidad no ha disminuído; así es que, aun suponiendo posible la rotura del macizo, conforme se ha indicado, el muro tendría siempre la debida resistencia.

MUROS CON TERRAPLEN DE ESCASA LATITUD

162. Sucede á menudo que el muro sostiene un terraplén perteneciente á una vía de comunicación cuya latitud es pequeña comparada con la altura de este muro. En semejante caso el plano que separa el prisma de máximo empuje termina por arriba más allá de la explanación y corta al talud de las tierras opuesto al macizo de fábrica.

Puede ofrecer algún interés averiguar si esta circunstancia es susceptible de conducir á una importante reducción en el espesor del muro.

Se determinará siempre el empuje por medio de la fórmula

$$Q = \frac{\delta}{2} \overline{AX'}^2 ;$$

y la longitud AX′ se obtiene con la construcción gráfica que conocemos y está indicada en la figura 76_a. Unicamente recordaremos que el punto K se halla trazando BK paralelamente á AC.

La misma construcción se aplica al caso en que el muro es de revestimiento, con la única diferencia de ser algo distinta la fijación del punto K (fig. 76_b). Se empieza entonces por determinar la posición del punto J sobre la prolongación de DC, trazando BJ paralela á AC, lo que da: área triáng. ABC = área triáng. ACJ; se halla luego el punto K sobre la prolongación de MD por medio de JK paralela á AD, de donde resulta: área triáng. ADK = área triáng. ADJ = área cuadrilátero ADCB.

Las mencionadas construcciones dan á conocer la longitud AX′, y por lo tanto, la intensidad del empuje. Se hallará el punto de aplicación de este empuje proyectando sobre el paramento AB y paralelamente á AX el centro de gravedad del prisma ABCX en el primer caso ó del prisma ABCDX en el segundo. Será fácil después establecer la ecuación relativa al equilibrio de giro.

Hemos aplicado este método á un muro de 16 metros de altura, sosteniendo un terraplén que enrasa la coronación, y cuya plataforma tiene un ancho de 6 metros. Los resultados obtenidos indican, para la latitud de la sección rectangular tipo, una relación $e = 0{,}314$. Sabemos que esta relación toma el valor 0,324 cuando el terraplén es de ancho indefinido; la diferencia, como se ve, ofrece escasa importancia; sería aún más pequeña

tratándose de un muro menos elevado, ó si la explanación tuviera mayor latitud.

Lo que antecede demuestra que en la mayoría de los casos puede prescindirse de la reducción del prisma de máximo empuje, cuando la explanación tiene una latitud limitada, debiendo considerarse ésta como indefinida.

MUROS EN SECO

163. En varias obras de construcción se asigna á los muros en seco el espesor relativo á los muros con mezcla, aumentado en una cuarta parte. Existe también otra regla que establece para los primeros muros un grueso igual á $\frac{2}{5}$ de la altura.

Ambos métodos dan casi los mismos resultados; la falta de concordancia en más ó en menos depende del valor asignado á la relación tipo para los muros de mampostería ordinaria. Así es que si se toma $e = \frac{1}{3}$, añadiendo la cuarta parte se obtiene $\frac{1}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{12} = 0{,}416$, cantidad algo mayor que $\frac{2}{5}$. Los resultados serían idénticos, haciendo $e = 0{,}32$.

Adoptando la cantidad de 2.200 kilog. para el peso del metro cúbico de mampostería con mezcla, y si se supone además que ésta contiene 0,25 de su volumen de mortero pesando 400 kilogramos, podrá asignarse al metro cúbico de mampostería en seco un peso de 1.800 kilog. Pero se deduce de la fórmula 38 (**51**) que las relaciones de espesor tipo se hallan, para una misma estabilidad, en razón inversa de las raíces cuadradas de las densidades de la fábrica; por lo tanto, designando por e' la nueva relación referente al caso que estamos examinando, se verifica

$$e' = e\sqrt{\frac{11}{9}} = 1{,}10e;$$

es decir, que bajo el punto de vista de la menor densidad,

habría que aumentar en $\frac{1}{10}$ el espesor de los muros en seco; pero como éstos, comparados con los muros con mezcla, presentan todavía una nueva causa de inferioridad procedente de la falta completa de cohesión, hallamos muy racionales las reglas que asignan á los primeros un espesor igual á los $\frac{5}{4}$ del que corresponde á los segundos, ó bien un espesor equivalente á los $\frac{2}{5}$ de la altura.

MUROS DE CONTENCIÓN DE AGUA

164. El espesor de los muros que se construyen para formar depósitos ó albercas destinadas á almacenar cierta cantidad de agua, se determinará fácilmente por medio de los principios que han sido expuestos.

Tratándose de un muro con paramentos inclinados, se aplicará la ecuación de equilibrio indicada en el primer artículo de este capítulo (**78**), que es

$$e^2 + \frac{D + 2Q'B}{E} e = \frac{2Q'A - C}{E}.$$

Recordaremos los valores de los coeficientes, que son como sigue:

$$A = \frac{1}{3 \cos. \theta} - (n + m) \operatorname{sen.} \theta$$

$$B = \operatorname{sen.} \theta .$$

$$C = \left(\frac{n^2}{3} + \frac{nm}{2} + \frac{m^2}{6}\right) \delta'$$

$$D = \left(n + \frac{m}{2}\right) \delta'$$

$$E = \frac{\delta'}{2}$$

e designa la relación del ancho de coronación á la altura del muro;

δ' la densidad de la mampostería que se toma igual á 2.200 kilogramos.

El empuje de un líquido está dado por la fórmula 18 del capítulo II (**38**), en la que ponemos doble acento á δ, densidad del agua, para distinguirla de δ sin acento, densidad de las tierras. Dicha fórmula es

$$Q = \frac{\delta'' H^2}{2} \times \frac{1}{\cos.\,\theta} = \frac{500}{\cos.\,\theta} H^2;$$

se hará, pues, en la anterior ecuación de equilibrio $Q' = \frac{500}{\cos.\theta}$:

n representa siempre el talud exterior, y

$m = \text{tang.}\ \theta$, el talud interior.

Haciendo variar los taludes n y m, podrá calcularse el siguiente cuadro, en el que se indican los anchos de coronación, así como también los anchos medios. Se ha tomado la inclinación de uno de los dos paramentos, hasta el límite 0,5, que aún permite dejar cierta latitud de coronación cuando el paramento opuesto es vertical.

NÚMERO 34

CUADRO *de anchos de coronación y anchos medios para muros de contención de agua, partiendo de un coeficiente de estabilidad igual á 2.*

Talud interior. $m = \overline{\text{tang.}}\ \theta$	ANCHO PARA UN TALUD EXTERIOR DE											
	$n = 0$		$n = 0,1$		$n = 0,2$		$n = 0,3$		$n = 0,4$		$n = 0,5$	
	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.
0,0	0,550 H	0,550 H	0,453 H	0,503 H	0,362 H	0,462 H	0,277 H	0,426 H	0,189 H	0,389 H	0,122 H	0,372 H
0,1	0,455 —	0,505 —	0,358 —	0,458 —	0,267 —	0,417 —	0,181 —	0,381 —	0,100 —	0,350 —		
0,2	0,358 —	0,458 —	0,281 —	0,430 —	0,169 —	0,369 —	0,087 —	0,337 —				
0,3	0,261 —	0,411 —	0,170 —	0,370 —	0,074 —	0,324 —						
0,4	0,164 —	0,364 —	0,068 —	0,318 —								
0,5	0,068 —	0,318 —										

165. La comparación del anterior cuadro con el análogo (número 6) del primer artículo relativo á los muros de sostenimiento (**78**), da lugar á las siguientes observaciones.

La relación del ancho á la altura de un muro de sección rectangular que sostiene una carga de agua es 0,55, cantidad bastante más crecida que la de $\frac{1}{3}$ correspondiente al empuje de las tierras. Algunos autores asignan á este ancho la mitad de la altura del muro; sin inconveniente podría adoptarse esta relación, si no hubiese que atender á otras consideraciones, pues todo se reduciría á aceptar el coeficiente de estabilidad 1,62 á que conduce, y aceptable sería, en atención á no estar sujeto el empuje del agua á las variaciones que pueden afectar al de las tierras, ni admitir tampoco sobrecargas. Pero, según veremos más adelante, existen motivos que no permiten reducir la relación 0,55, y obligan, por el contrario, á aumentarla.

El examen de una misma línea horizontal del cuadro demuestra la gran influencia que ejerce el talud exterior sobre la disminución de volumen ó sobre la reducción del ancho medio de la fábrica, según acontece para los muros de sostenimiento; pero la comparación no da ya los mismos resultados tratándose del talud interior, pues mientras su influencia es casi nula para estos muros, produce, por el contrario, una disminución de volumen más importante aún para los de contención de agua. En efecto; una inclinación interior de 0,5 reduce el ancho medio á 0,318, mientras que el mismo talud por la parte exterior exige 0,372.

Las inclinaciones de los dos paramentos obedecen con bastante aproximación á la regla de transformación de perfiles al noveno, como es fácil comprobar añadiendo al ancho de coronación los $\frac{8}{9}$ de la suma de los dos taludes. Los resultados ofrecen para la latitud al noveno cantidades comprendidas entre 0,51 y 0,56, y que por lo tanto, se separan poco de la relación 0,55 relativa á la sección rectangular.

De aquí resulta, que si pudieran aceptarse las cifras del anterior cuadro, tendríamos una regla sencilla para fijar la sección de un muro con taludes sometida á una carga de agua; no habría más que construir un rectángulo cuya latitud fuese 0,55 H, y luego inclinar los dos paramentos según se quisiera, haciéndolos girar alrededor de los puntos situados al noveno de la altura.

166. Pero dijimos que los espesores del cuadro no eran suficientes, y de esto nos haremos cargo al estudiar la resistencia que ofrece el muro al aplastamiento. Diremos antes algunas palabras sobre el movimiento de deslizamiento.

Se obtiene el valor de f dividiendo la componente horizontal del empuje, que es siempre 500 kilog. (tomando la altura por unidad) por el peso del muro, al que se agrega la componente vertical del empuje expresada por $500^{k.}$ tang. θ. Se hallará el peso del muro multiplicando por δ' ó por 2.200 ks. el ancho medio que indica el cuadro. Los resultados de la división varían entre $f = 0,40$ y $f = 0,60$; el primer valor corresponde á la sección rectangular, aumentan luego estos valores con la inclinación de los dos paramentos, sobre todo con la del exterior. Todos ellos son más crecidos que los análogos correspondientes á los muros de sostenimiento; con todo son en general aceptables, no perdiendo, sin embargo, de vista el caso de un mal subsuelo.

167. Vamos á examinar ahora la resistencia del muro al aplastamiento.

Como el momento del peso del muro es igual al del empuje oblicuo multiplicado por el coeficiente de estabilidad 2, tendremos para la dlstancia del punto de paso de la resultante á la arista exterior de la base

$$d = \frac{\mathcal{M}\,Q - \mathcal{M}\,Q \text{ tang. } \theta}{P + Q \text{ tang. } \theta}.$$

Hay que poner en esta expresión los valores siguientes:

$$Q = 500\ H^2;$$

$$\mathcal{M}\ Q = 500\ H^2 \times \frac{H}{3} = 166{,}6\ H^3;$$

$$Q \text{ tang. } \theta = Qm = 500\ mH^2;$$

$$\mathcal{M}\ Q \text{ tang. } \theta = 500\ mH^2 \times \left(n + e + \frac{2}{3}\ m\right) H$$

$$= 500\ m \times \left(n + e + \frac{2}{3}\ m\right) \times H^3;$$

$$P = \delta' e_m\ H^2 = 2.200\ e_m\ H^2 = 2.200 \left(e + \frac{n}{2} + \frac{m}{2}\right) H^2;$$

e expresa el ancho de coronación y e_m el ancho medio.

Hecha la sustitución, resulta

$$d = \frac{166{,}6 - 500\ m \left(n + e + \frac{2}{3}\ m\right)}{2.200\ e_m + 500\ m} \times H.$$

Valiéndonos de esta expresión y de las fórmulas del trapecio, se podrá disponer el siguiente cuadro:

NÚMERO 35

CUADRO *de distancias de la resultante á la arista de giro y presiones unitarias máximas, para los muros de contención de agua, partiendo de un coeficiente de estabilidad igual á 2.*

$m = \text{tang.}\ \theta$	$n = 0$		$n = 0,1$		$n = 0,2$		$n = 0,3$		$n = 0,4$		$n = 0,5$	
	Distancia. d	Presión. ρ	Distancia. d	Presión. ρ	Distancia. d	Presión. ρ	Distancia. d	Presión. ρ	Distancia. d	Presión. ρ	Distancia. d	Presión. ρ
	m.	K.	m.	K.	m.	K.	m.	K.	m.	K.	m.	K.
0,0	0,137 H	5580 H	0,150 H	4920 H	0,164 H	4130 H	0,177 H	3524 H	0,194 H	2942 H	0,204 H	2670 H
0,1	0,121 —	6400 —	0,133 —	5300 —	0,144 —	4476 —	0,157 —	3770 —	0,168 —	3270 —		
0,2	0,105 —	7466 —	0,110 —	6338 —	0,137 —	4788 —	0,136 —	4136 —				
0,3	0,092 —	7622 —	0,100 —	6426 —	0,117 —	4916 —						
0,4	0,081 —	8342 —	0,089 —	6742 —								
0,5	0,070 —	9041 —										

168. Puede observarse que las presiones del cuadro, que están referidas al metro cuadrado, aumentan con la inclinación del paramento interior, y decrecen al contrario cuanto más talud se da al exterior. Sin embargo, todas ellas son admisibles para esta clase de muros, de escasa elevación por lo regular. En efecto; la mayor, aplicada á una altura de 10 metros, solo indica 9 kilogramos por centímetro cuadrado, lo cual nada tiene de exagerado, siendo hidráulica la mampostería empleada en la construcción.

Pero no son estos resultados los que impiden adoptar para las construcciones importantes los anchos obtenidos con el cálculo; procede el inconveniente de las distancias que median entre el punto de paso de la resultante y la arista exterior de la base. Al comparar estas distancias con la latitud del muro en su parte inferior, latitud que resulta de agregar al ancho de coronación los dos taludes, se ve que no llegan á componer la tercera parte de la mencionada latitud. En semejantes casos el macizo de fábrica se halla sometido, en su parte interior y hasta cierta altura, á una contrapresión que puede ocasionar el agrietamiento de la mampostería. Esta circunstancia, que según se vió al examinar la posibilidad del giro de los muros por desgaje de la mampostería, no afecta á la estabilidad de la obra cuando se trata de oponerse al empuje de las tierras, merece, por el contrario, tenerse muy en cuenta para un muro sometido á una carga de agua, pues la introducción del líquido dentro de la fábrica constituye una causa de destrucción, ó por lo menos ha de facilitar considerablemente las filtraciones que deben evitarse en toda construcción esmerada.

169. Los anchos obtenidos, partiendo de un coeficiente de estabilidad igual á 2, pueden aplicarse á lo más á las albercas de escasa importancia; pero los muros de los grandes depósitos de agua, como son los de distribución destinados al suministro de las poblaciones, deben estar calculados de manera que la resultante de las fuerzas á que están sometidos corte á la base en el núcleo ó tercio central de su ancho, condición que será suficiente para evitar la rotura de la fábrica.

Para ello no hay más que establecer la ecuación

$$\frac{\mathcal{M}\,P + \mathcal{M}\,Q \text{ tang. } \theta - \mathcal{M}\,Q}{P + Q \text{ tang. } \theta} = \frac{1}{3}(e + m + n)\,H.$$

Poniendo en esta ecuación los valores de

$$Q\,, \quad \mathcal{M}\,Q\,, \quad Q \text{ tang. } \theta\,, \quad \mathcal{M}\,Q \text{ tang. } \theta, \quad P \text{ y } \mathcal{M}\,P\,,$$

que hemos hallado (**167**), resulta

$$e^2 + (3n + 1{,}24\,m)\,e = 0{,}4545 - n^2 - 0{,}7872\,m^2 - 2{,}2428\,nm;$$

de la cual se deduce para el ancho de coronación;

$$e = -\,(1{,}5\,n + 0{,}62\,m)$$

$$+ \sqrt{(1{,}5n + 0{,}62m)^2 + 0{,}4545 - n^2 - 0{,}7872m^2 - 2{,}2428nm}\,.$$

Haciendo variar los taludes n y m se obtienen los resultados incluídos en el cuadro que sigue, que además de los anchos de coronación, contiene los anchos medios:

NÚMERO 36

CUADRO *de anchos de coronación y anchos medios para los muros de contención de agua, cuando la resultante corta á la base al tercio de su latitud.*

Talud interior. m	ANCHOS PARA UN TALUD EXTERIOR DE											
	$n = 0$		$n = 0,1$		$n = 0,2$		$n = 0,3$		$n = 0,4$		$n = 0,5$	
	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.	Coronación.	Medio.
	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	
0,0	0,674 H	0,674 H	0,533 H	0,583 H	0,410 H	0,510 H	0,309 H	0,453 H	0,209 H	0,403 H	0,126 H	0,375 H
0,1	0,609 —	0,659 —	0,466 —	0,566 —	0,340 —	0,490 —	0,217 —	0,417 —	0,135 —	0,385 —	0,050 —	0,350 —
0,2	0,538 —	0,638 —	0,392 —	0,542 —	0,264 —	0,464 —	0,153 —	0,403 —	0,056 —	0,356 —		
0,3	0,460 —	0,610 —	0,312 —	0,512 —	0,181 —	0,431 —	0,069 —	0,366 —				
0,4	0,377 —	0,577 —	0,224 —	0,474 —	0,092 —	0,392 —						
0,5	0,285 —	0,535 —	0,123 —	0,429 —								
0,6	0,184 —	0,484 —	0,024 —	0,374 —								
0,7	0,073 —	0,423 —										

Comparando este cuadro con el calculado partiendo de un coeficiente de estabilidad igual á 2 (**164**), se observa también en los anchos medios un aumento, tanto más notable, cuanta menor inclinación presentan los paramentos. Pero sucede aquí lo contrario, y es que el talud exterior tiene más influencia que el interior sobre la reducción de volumen; en efecto, la latitud media toma el valor 0,375 H para un talud exterior de 0,5 y un paramento interior vertical, por ejemplo, mientras que dicha latitud es 0,535 H cuando el mismo talud de 0,5 se halla por el lado del líquido.

170. Los muros que forman el recinto de los depósitos de distribución, suelen tener el paramento exterior con cierta inclinación fijada de antemano por condiciones de conveniencia. Lo mismo sucede en lo concerniente á la latitud de coronación destinada á recibir las losas de remate y á veces un pretil. Resulta de aquí, que para conseguir la mayor economía posible en el volumen de fábrica, debe darse al paramento interior el mayor talud compatible con la condición que nos hemos impuesto, de hacer pasar la resultante por el punto situado al tercio de la base.

Se dividirá para esto el talud total exterior y el ancho superior por la altura del muro, lo que da n y e; examinando después el cuadro que antecede, y mediante una sencilla interpolación, si necesaria fuese, se verá fácilmente qué inclinación hay que dar al paramento interior.

Sin embargo, puede evitarse la interpolación y determinar directamente el talud interior valiéndose de la siguiente fórmula, que se obtiene resolviendo con respecto á m la ecuación empleada para calcular el cuadro:

$$m = -(0{,}789\, e + 1{,}4245\, n)$$
$$+ \sqrt{(0{,}789e+1{,}4245n)^2+0{,}577-1{,}271(e^2+n^2)-3{,}874en}\,.$$

171. Los depósitos destinados al servicio de una distribución se dividen generalmente en dos compartimientos, por medio de un muro interior. Debe este muro satisfacer á la con-

dición de resistir al empuje del agua contenida en uno de ellos, en tanto que el otro está vacío. Puede darse á este muro una sección rectangular; pero más económico será disponer sus dos paramentos con un talud, que debe ser el mismo por uno y otro lado. Se determina este talud por medio del mismo cuadro anterior, y después de fijar previamente el ancho de coronación ó el valor de e. No hay más que comparar este valor con los análogos del cuadro, pero que sean relativos al caso de una misma inclinación para ambos lados.

Es también fácil obtener directamente este talud empleando la fórmula

$$m = -0{,}526\, e + \sqrt{0{,}1127 + 0{,}0286\, e^2}\,,$$

deducida también de la misma ecuación que la anterior, pero haciendo $n = m$, y resolviendo después con respecto á m.

172. Vamos á tratar ahora de reemplazar las fórmulas que dan la latitud superior en función de los dos taludes, ó el talud interior en función del exterior y de dicha latitud, por otras fórmulas empíricas que, aunque menos exactas, sean sencillas, y por procedimientos gráficos poco complicados y fáciles de recordar.

Después de algunos ensayos, nos hemos decidido por las dos fórmulas siguientes, que dan la relación del ancho medio expresado por e_m;

$$e_m = \frac{2}{3} - 0{,}3\, m - 0{,}7\, n, \qquad [58]$$

cuando los dos taludes son distintos; y

$$e_m = \frac{2}{3} - m, \qquad [59]$$

si los taludes de ambos lados tienen la misma inclinación.

Estableciendo comparación entre los resultados de aplicar las anteriores fórmulas con las cifras correspondientes del cuadro, se verá que las latitudes obtenidas con la segunda de estas dos fórmulas casi no ofrecen divergencia, pero que la primera produce dimensiones un poco más crecidas cuando el paramento interior tiene mucha inclinación.

Añadiendo á los anteriores anchos medios la semisuma de los dos taludes, resulta, para la relación de ancho de base que designamos por e_b,

$$e_b = \frac{2}{3} + 0,2\,m - 0,2\,n \qquad [60]$$

para distintos taludes; y

$$e_b = \frac{2}{3}, \qquad [61]$$

si los dos taludes son iguales.

173. Se deduce de estas dos últimas fórmulas un procedimiento gráfico muy sencillo para fijar la sección de un muro de contención. Constrúyase el rectángulo ABCD (fig. 77), cuya latitud AD sea los $\frac{2}{3}$ de la altura AB del muro; llévense sobre los lados verticales, por bajo de la base para el paramento exterior y por encima para el interior, las longitudes DE y AF, iguales ambas á la quinta parte de la altura; se trazarán luego los nuevos paramentos haciéndolos pasar por los puntos E, F, con la inclinación necesaria. Así es que si se fija de antemano el talud exterior y el ancho de coronación, se traza primero EI, se lleva luego IJ igual á este ancho, y uniendo J con F queda determinada la posición del otro paramento.

Cuando se trata de un muro divisorio de depósito con igual talud por ambos lados, se construirá siempre el rectángulo cuyo ancho sea igual á $\frac{2}{3}$ de la altura del muro (fig. 78);

los nuevos paramentos pasarán por las extremidades de la base del rectángulo. Se dará á estos paramentos la conveniente inclinación, teniendo en cuenta la latitud que ha de quedar en la parte superior, según las condiciones del proyecto.

Los procedimientos gráficos que acabamos de exponer fijan el talud de uno de los dos paramentos del muro cuando se da la del otro y la latitud de coronación. Puede, sin embargo, calcularse directamente el talud desconocido estableciendo la ecuación

$$\frac{2}{3} + 0{,}2\,m - 0{,}2\,n = e + m + n,$$

que expresa que el ancho de base es igual al ancho de eoronación, más la suma de los dos taludes. Se deduce de esta ecuación

$$m = \frac{5}{6} - \frac{5}{4}\,e - \frac{3}{2}\,n,$$

para el caso de ser distinta la inclinación de los paramentos, y

$$m = \frac{1}{3} - \frac{e}{2},$$

cuando los dos taludes son iguales.

174. Hemos dicho que las fórmulas prácticas que proponemos para determinar la sección de un muro de depósito, así como los procedimientos gráficos derivados de dichas fórmulas, solo son aproximados. Pueden, sin embargo, emplearse en la práctica, especialmente en un anteproyecto. Por otra parte, en muchos casos, y sobre todo para un depósito de distribución, podrá haber necesidad de modificar los resultados por motivos de que no hemos hablado hasta ahora.

No debe perderse de vista que los anchos exactos calculados suponen: 1.° Que el muro se encuentra aislado por

ambos lados. 2.° Que el agua obra hasta la parte superior. 3.° Por último, que el depósito no está cubierto.

Si el paramento exterior se apoya en un terreno más ó menos compacto, y que al mismo tiempo recibe el empuje de las tierras, es evidente que dicho empuje contrarrestará en parte el efecto análogo producido por el agua; podría esto dar lugar á una disminución de espesor de la fábrica. Será, sin embargo, prudente prescindir de semejante reducción, pues á consecuencia de la cohesión, nada de extraño tendría que las tierras dejasen momentáneamente de actuar sobre el muro. Solo en el caso en que la resistencia del terreno fuese considerable, estando éste constituído por roca firme, por ejemplo, es cuando podría disminuirse el espesor del muro, considerándolo como un simple revestimiento.

De encontrarse el muro más elevado que el nivel del agua, existiría un nuevo motivo de disminución de ancho que podría calcularse fácilmente y que convendría aprovechar.

Los depósitos de distribución se cubren por lo regular con un sistema de bóvedas de arista ó por medio de bóvedas de cañón seguido, sostenidas por una serie de arcos. En un caso como en otro, el empuje de las bóvedas contiguas á los muros de recinto se añade al empuje del agua, exigiendo un aumento de espesor que debe determinarse. El problema no ofrece dificultad; se obtendrá una de las dimensiones del muro, ya sea el ancho de coronación, ya uno de los dos taludes, estableciendo la ecuación

$$\frac{\mathcal{M}\,P + \mathcal{M}\,Q \text{ tang. } \theta + \mathcal{M}\,Q_1 \text{ sen. } \alpha - \mathcal{M}\,Q - \mathcal{M}\,Q_1 \cos.\alpha}{P + Q \text{ tang. } \theta + Q_1 \text{ sen. } \alpha} = \frac{1}{3}(e + m + n)\,H,$$

en la cual, además de las anotaciones anteriores, Q_1 designa el empuje oblicuo de la bóveda por metro lineal de muro, y α el ángulo que este empuje forma con la horizontal.

En el muro divisorio se destruyen los empujes de las bóvedas adyacentes; pero dicho muro soporta el peso de las mismas, pudiendo esto motivar alguna reducción de espesor.

MUROS DE MUELLE

175. Los muros que forman el revestimiento de los muelles tienen que resistir al empuje de un terraplén que puede encontrarse sumamente reblandecido con el agua del mar, susceptible de penetrar debajo del cimiento y elevarse en el interior del citado terraplén. Se comprende que en virtud de esta circunstancia, debe disminuir considerablemente el ángulo de resbalamiento de las tierras; por el contrario, el empuje aumentará y ha de exigir para el macizo de fábrica un espesor que exceda del tercio de la altura.

En una memoria que, con motivo de un proyecto de muro para el puerto de *Dieppe*, escribió *Mr. Gayant*, memoria inserta en los *Annales des Ponts et Chaussées*, año de 1831, se presentan varios perfiles de muelle que han sido construídos, ya en el mencionado puerto, ya en otros, en cuyos perfiles se observa un espesor medio que varia entre 0,37 y 0,42 de la altura del muro, lo que da lugar para el conjunto de éstos á una latitud media de 0,40 próximamente.

A fin de establecer la construcción en buenas condiciones de resistencia, Mr. Gayant asigna al macizo de fábrica objeto del proyecto un espesor medio de 0,41 de su altura, observando á la par que el terraplén está formado con cantos rodados sacados del puerto, frecuentemente mezclados con cieno, los cuales en marea alta están bañados por el agua del mar que penetra por debajo del cimiento, sin que en marea baja se retire ésta del interior con tanta rapidez como lo hace por fuera.

Haremos notar que varios de los muros que cita M. Gayant, por más que tienen un espesor de 0,40 y 0,41 de su altura respectiva, y aunque su construcción sea esmerada, han experimentado movimientos debidos al empuje del terraplén. ¿No

parece esto indicar que los mencionados espesores son insuficientes?

A fin de aclarar esta duda, observaremos que para establecer comparación entre varias secciones de muros de sostenimiento y partiendo del espesor medio, con algunas probabilidades de exactitud, es preciso que estas secciones se hallen en condiciones semejantes de forma, ó que tengan por lo menos un mismo talud exterior. Pero en los muros indicados por M. Gayant, este talud varía entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{12}$ de la altura; se concibe, según enseña la teoría, que entre estos límites de inclinación y para un mismo espesor medio, la resistencia del muro es muy diferente.

Si transformamos cada una de estas secciones en otra de forma rectangular de igual estabilidad, se obtendrá para los nuevos perfiles, anchos evidentemente mayores que los de las secciones con talud, anchos cuyo valor se hallaría con la altura en una relación que pasará de 0,50. A pesar de esta relación, mucho más crecida que la de $\frac{1}{3}$, admitida para los muros ordinarios de sostenimiento, deben considerarse los citados muros de muelle como no ofreciendo un perfil suficientemente estable, puesto que así lo demuestra la experiencia. Hemos indicado de dónde podía proceder la falta de estabilidad; en la mayoría de los casos deberá atribuirse al aumento de empuje ocasionado por la introducción del agua en el interior del terraplén.

176. El mismo tomo de los *Annales des Ponts et Chaussées* (1831), contiene una nota de *Navier* sobre el proyecto de muro de M. Gayant, y en la cual observa que, puesto que el terraplén por ejecutar en el puerto de Dieppe, debe componerse de cantos rodados mezclados con légamo, puede atribuirse á este terraplén un empuje que difiera poco del que produciría un líquido cuyo peso específico fuese mucho mayor que el del agua, y casi igual al de las tierras.

Encontrando muy racional esta observación, veamos lo que resulta de admitir la hipótesis de Navier.

Consideremos un muro de sección rectangular y designemos por

H la altura;

e la relación del ancho uniforme á esta altura;

δ la densidad del flúido que haremos igual á 1.600 k.;

δ' la densidad de la mampostería igual á 2.200 k.

El empuje del líquido será

$$Q = \frac{\delta H^2}{2},$$

y su momento

$$\mathcal{M}Q = \frac{\delta H^2}{2} \times \frac{H}{3} = \frac{\delta H^3}{6},$$

el peso de la mampostería y su momento están expresados como sigue:

$$P = e\delta' H^2 \qquad \mathcal{M}P = e\delta' H^2 \times \frac{eH}{2} = \frac{\delta' e^2 H^3}{2}.$$

Tomando como siempre un coeficiente de estabilidad igual á 2, estableceremos la ecuación de equilibrio

$$\frac{\delta' e^2 H^3}{2} = 2 \times \frac{\delta H^3}{6},$$

de donde se deduce

$$e = 0{,}8165 \times \sqrt{\frac{\delta}{\delta'}}.$$

Finalmente, poniendo por δ y por δ' sus valores 1.600 k. y 2.200 k., resulta

$$e = 0{,}70. \qquad [62]$$

Es decir, que para que el muro rectangular resista al empu-

je de este líquido, con un coeficiente de estabilidad igual á 2, es preciso que su espesor uniforme sea los *siete décimos* de su altura.

177. Con alguna exageración se presenta á primera vista este resultado, pareciendo que debe dar lugar á un volumen excesivo de mampostería. Es, sin embargo, susceptible este volumen de poderse reducir notablemente sin alterar la estabilidad de la obra. En efecto; al tratar de la resistencia de giro de los muros de contención de agua, hemos visto que la inclinación ó talud del paramento interior, es decir, del paramento en contacto con el líquido, aumentaba la resistencia del muro, y que este talud, así como el opuesto, podían someterse con bastante aproximación á la regla de transformación de perfiles al noveno. Equivale esto á decir, que basta asignar el espesor hallado para el rectángulo á la sección horizontal del muro situada al noveno de la altura.

Se concibe, pues, que dando una fuerte inclinación á los dos paramentos ó á uno solo, puede conseguirse una gran economía de volumen. Generalmente se dispone el paramento exterior de los muros de muelle con el menor talud posible, con objeto de facilitar el atracado de los buques. Hemos dicho que en los perfiles citados por M. Gayant, este talud estaba comprendido entre $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{5}$; por lo regular no se pasa de $\frac{1}{10}$. Pero es posible aumentar la inclinación del paramento opuesto, que es además susceptible de perfilarse por retallos.

178. Tomemos como ejemplo un muro de 10 metros de altura; la regla que precede asigna al espesor del muro, al noveno de la altura, la cantidad de 7 metros. Es evidente que podremos forzar la suma de taludes, tanto más, cuanto menos latitud se dé á la coronación; fijemos esta latitud en $1^m,40$; fácilmente se verá que el ancho de base tendrá que ser $7^m,70$ y la suma de los taludes $6^m,30$; de manera que dando un metro al exterior, quedarían 5,30 para el paramento interior, que se dispondría por retallos. Resulta para el ancho medio 0,455 de la altura, relación que, como se ve, no supera mucho

la de 0,42, obteniéndose de este modo una gran resistencia.

Podría objetarse que hemos admitido una hipótesis muy desfavorable, al asimilar el terraplén á un líquido de 1.600 k. de peso por metro cúbico, no teniendo además en cuenta el contraempuje del agua del mar en la parte baja del paramento exterior. Puede contestarse á esto, que se ha prescindido también de otro elemento que hace crecer el empuje; nos referimos á la sobrecarga á que dan lugar las mercancías, así como los aparatos y vehículos de carga y descarga. En suma, consideramos muy aceptable la regla que establece los 0,7 al noveno de altura, regla cuyos resultados han sido aumentados aún en algunos casos. (Puerto de *S. Nazaire.*)

179. Verificaremos á continuación la estabilidad del muro de 10 metros de altura, cuyas dimensiones hemos fijado, y que van acotadas en la figura 79. Se asigna al peso del líquido que ocasiona el empuje la cantidad de 1.600 kilogramos por metro cúbico, y á la mampostería 2.200 kilog. para la misma unidad. Pueden disponerse los cálculos como sigue:

		Pesos.	Brazo de palanca	Momentos.
		K.	m.	Km.
Triángulo exterior de fábrica	$\frac{1 \times 10}{2} \times 2.200.$	11.000	0,66	7.260
Rectángulo de íd.	$1,40 \times 10 \times 2.200.$	30.800	1,70	52.360
Triángulo interior de íd.	$\frac{5,30 \times 10}{2} \times 2.200.$	58.300	4,17	243 111
Triángulo de líquido	$\frac{5,30 \times 10}{2} \times 1.600.$	42.400	5,93	251.432
		142.500		554.163
Empuje del líquido	$\frac{1.600 \times \overline{10}^2}{2}$	80.000	$\frac{10}{3}$	266 666

Resulta para el coeficiente de estabilidad

$$e = \frac{554.163}{266.666} = 2,07.$$

Se ve que este coeficiente no difiere mucho del valor 2 que se había adoptado. El pequeño exceso que da el cálculo procede de la falta de exactitud matemática de la regla de transformación al noveno. Es, sin embargo, muy aceptable en la práctica.

GENERALIDADES SOBRE ELECCIÓN DEL PERFIL MAS ECONÓMICO

180. Al terminar este capítulo haremos algunas observaciones generales que ofrecen interés.

El establecimiento de las vías de comunicación, carreteras ó ferrocarriles, exige á menudo la construcción de extensos muros de sostenimiento que, por su mucho volumen, resultan costosos, mereciendo, por lo tanto, estudiarse con toda la economía compatible con una buena estabilidad.

Esta cuestión deja de tener la misma importancia cuando solo se trata de muros de escasa longitud, como, por ejemplo, los de acompañamiento de los puentes y viaductos; por otra parte, estos muros deben, por lo regular, presentar un paramento exterior, cuya inclinación se fija por ciertas consideraciones de estética.

En la mayoría de los casos, el fin que se trata de conseguir al establecer los grandes muros que contornean las vías de comunicación, es evitar que la caída del terraplén invada un terreno que conviene dejar libre con motivo del servicio que presta, ya sea por contener otras construcciones, ó porque su expropiación sea muy costosa, ya porque pueda inundarse con las aguas de alguna corriente situada á proximidad. Los trazados á media ladera con fuerte pendiente transversal, exigen también con frecuencia muros de gran longitud.

La forma que puede darse á la sección del muro depende en gran parte de la distancia que existe entre el límite del terreno que conviene librar y el plano vertical, ó mejor dicho, el cilindro vertical que pasa por el borde de la explanación del camino. Si esta distancia es suficientemente grande, nada impedirá asignar una fuerte inclinación al paramento exterior del muro y disponer el interior con desplome y contrafuertes de forma triangular, pudiendo dichos paramentos ser rectos ó curvos.

En muchos casos no será preciso elevar el muro hasta el nivel de la vía. Exige la economía que solo se dé á la fábrica la altura estrictamente indispensable para conseguir el objeto que se persigue; en efecto, sabemos (**148**) que la relación entre el espesor y la altura no crece proporcionalmente á la sobrecarga de tierra, existiendo un límite del que no debe pasarse, aunque esta sobrecarga sea infinita.

Si la distancia existente entre el límite asignado al pie del muro y el cilindro que proyecta el borde del camino es pequeña, habrá que establecer la coronación al nivel de la rasante, y á veces solo podrá darse al paramento exterior un pequeño talud. En semejante caso, que conviene evitar en lo posible, se obtendrá la solución menos costosa, adoptando el sistema de contrafuertes interiores y bóvedas de aligeramiento; pero cuando se trate de un muro de gran altura, no debería olvidarse lo que hemos dicho al examinar este tipo (**135**), bajo el punto de vista de la presión máxima; acaso resulte la necesidad de un nuevo estudio del proyecto que permita dar al paramento exterior el talud necesario, al efecto de no exceder del límite de presión que conviene imponerse, según sea la naturaleza de los materiales empleados.

CAPÍTULO V

PRESAS DE EMBALSE

181. Las presas de embalse que se establecen sobre algunas corrientes de agua, tienen por objeto la formación de extensos remansos, cuyo volumen asciende por lo regular á muchos millones de metros cúbicos. Este resultado no puede conseguirse, sobre todo si la pendiente del talveg es algo fuerte, sino por medio de muros de gran elevación, que dan lugar á obras costosas.

Existe, pues, gran interés, bajo el punto de vista de la economía, en disponer esta clase de muros de manera que su sección transversal tenga la menor superficie posible, al mismo tiempo que satisface á las debidas condiciones de estabilidad.

Al estudiar los muros de sostenimiento, así como los de contención de agua, hemos considerado especialmente la resistencia en la base, por ser allí menor cuando los paramentos presentan un perfil rectilíneo. Vimos entonces (**78**) y (**164**), que conservando un mismo talud para cada uno de estos paramentos, la latitud de coronación variaba con la altura del muro; resulta de esto, que si se considera separadamente la mitad superior, por ejemplo, de un muro dispuesto con cierta estabilidad, es evidente que la base del nuevo macizo ha de ofrecer, para esta misma estabilidad, un exceso de latitud susceptible de suprimirse; pero al examinar de nuevo la totalidad del muro, á consecuencia de esta reducción habrá que ensanchar la base primitiva.

Dará esto lugar al perfil ABCEF, en sustitución de ABCD (figura 80).

Haciendo un número cualquiera de secciones horizontales, podrá tomarse sucesivamente cada una de ellas como base de la parte de macizo situada encima, y empleando consideraciones análogas, se obtendrá el perfil quebrado ABCEFLI, en lugar del primitivo ABCD.

Si el número de subdivisiones crece indefinidamente, se llega á un perfil curvilíneo cóncavo, pudiendo disponerse la concavidad de un lado cualquiera del muro.

182. Los cuadros calculados para deducir la presión unitaria máxima que tiene lugar en la base de los muros de sostenimiento y de los de contención de agua, hacen ver, según ya hicimos notar (**88** y **168**), que á partir de cierta altura, la mampostería puede hallarse sometida á fuertes presiones inadmisibles en la práctica. Demuestra esto la necesidad de estudiar los grandes muros de embalse, bajo el punto de vista especial de la resistencia al aplastamiento.

Se hizo también observar (**168**) que la presión máxima en la base de los muros de contención aumenta con la inclinación del paramento interior, y disminuye, por el contrario, á medida que se da mayor talud al exterior. Se deduce de esta observación que será preferible colocar el perfil cóncavo del lado opuesto al agua, dejando el otro paramento completamente vertical.

Es precisamente lo que se hace para las presas de embalse. La disposición inversa no puede estar motivada sino cuando el muro debe dar paso por su coronación al agua excedente de las crecidas, como se ve alguno que otro ejemplo; pero esta disposición no merece aconsejarse, pues el choque de una voluminosa masa de agua cayendo de gran altura ha de producir forzosamente al pie del muro fuertes conmociones, susceptibles de comprometer la solidez de la obra; ó por lo menos ocasionarán con el tiempo filtraciones de importancia, que deben evitarse en esta clase de construcciones, y por esta razón solo trataremos de las presas con vertedero lateral que dé salida al agua de la corriente, al encontrarse lleno el embalse.

183. La latitud superior de una presa de embalse debe ser nula, considerando la cuestión teóricamente, puesto que no existe allí ningún empuje ni carga. Pero se comprende que es forzoso en la práctica dar á la coronación del muro cierto ancho necesario para resistir al oleaje que se levante en el embalse, ó al choque de los cuerpos flotantes arrastrados por la corriente; servirá también la parte superior de la presa para dar paso á los empleados encargados del servicio, y por último, podrá suceder en algunos casos que se tenga que utilizar la obra como viaducto para establecer comunicación entre las dos laderas del valle, especialmente cuando el remanso intercepta antiguas vías existentes.

Por lo regular se da á la latitud superior de 3 á 5 metros; pero consideramos conveniente acercarse más bien á la última de las cifras citadas que á la anterior, pues la reducción del ancho no produce notable economía de fábrica para un muro de gran altura, y en cambio disminuye la facilidad del servicio.

Adoptando, pues, un ancho de coronación dado, nos hallamos con un exceso de resistencia en la parte superior del muro, y esto motiva la posibilidad de establecer hasta cierta altura, á partir de arriba, una sección completamente rectangular. Desde este punto hacia abajo, el paramento exterior debe ofrecer un talud, tanto más pronunciado, cuanto más se acerca á la base del macizo.

Se obtiene así una sección de presa compuesta de dos partes distintas: la superior CBEF (fig. 81) con los dos paramentos verticales, y la inferior EFAD, en la que el paramento interior conserva la verticalidad, pero cuyo perfil exterior presenta una inclinación que va en aumento.

184. Pudiendo estar vacío el embalse en ciertas épocas, claro está que entonces el peso del muro dispuesto con la sección indicada, y por no existir ya ningún empuje, ha de producir la máxima presión unitaria en la arista posterior de la base, y si el muro es suficientemente elevado, esta presión superará al límite impuesto para la mampostería de que se compone. Se deduce de lo que acabamos de manifestar, la ne-

cesidad de dar también cierto talud con perfil curvilíneo á la parte baja del paramento interior de la obra, á partir de un punto susceptible de determinarse.

En resumen, la sección de una presa de embalse se compone de tres partes (fig. 82); la superior CBEF, completamente rectangular; la intermedia EFGH, cuyo paramento exterior es cóncavo y el interior vertical, y por último, la parte inferior GHDA, que tiene cóncavos ambos paramentos.

Se designa esta sección bajo la denominación de *sección de igual resistencia*, por más que la igualdad solo se verifica para los trozos curvilineos ó cóncavos de los paramentos, en donde la presión alcanza el máximo impuesto. Para el resto del perfil correspondiente á los paramentos verticales, la presión es inferior á dicho máximo, y tanto menor, cuanto más se aproxima al vértice el punto considerado.

185. Indicaremos para cuanto se refiere al estudio de las grandes presas de embalse, dos excelentes memorias publicadar en los *Annales des Ponts et Chaussées*, en 1866, por los ingenieros *MM. Graef* y *Delocre*, autores de la hermosa presa de *Furens*, cuyo buen efecto y construcción hemos tenido ocasión de admirar.

Las disposiciones adoptadas en la obra que acaba de mencionarse han sido inspiradas, sin duda ninguna, por otra memoria anterior de *M. Zazilly*, ingeniero de puentes y calzadas, memoria inserta en el año 1853 de la misma publicación. A *M. Zazilly* se deben los primeros estudios relativos á la determinación del perfil de igual resistencia, estudios que han abierto un nuevo camino, seguido por todos los que han proyectado las grandes presas de embalse modernas.

Vamos á extraer de la memoria de *M. Delocre*, especialmente dedicada á los cálculos de resistencia, algunas indicaciones generales sobre la marcha que debe seguirse para obtener la sección de un gran muro de embalse.

186. Si partiendo de un ancho nulo de coronación, se quisiera establecer la ecuación de la curva teórica, del perfil de igual resistencia, opuesta al agua, habría que referir esta curva

á dos ejes, tomando el paramento vertical por el de las z, y una perpendicular al mismo pasando por el vértice, por el de las x. Sea M (fig. 83) un punto cualquiera del paramento cóncavo; hagamos $OA = z$, y $AM = x$; se reduce el problema á hallar una relación entre z y x, que dará la ecuación de la curva.

Considérase siempre una longitud de muro igual á la unidad; se halla este muro sometido á dos fuerzas, que son su propio peso y el empuje del agua; estas dos acciones producen sobre una sección horizontal cualquiera del macizo una presión unitaria, que ha de ser la misma para todos los puntos del paramento curvo, é igual al tipo impuesto como máximo.

Pero esta presión, conocida de antemano y que designamos por ρ, está dada por una de las dos fórmulas del trapecio (**11**)

$$\rho = \frac{2P}{b}\left(2 - \frac{3d}{b}\right)$$

$$\rho = \frac{2}{3} \times \frac{P}{d};$$

se empleará la primera ó la segunda de estas fórmulas, según que la distancia d, del punto de paso de la resultante, sea mayor ó menor que el tercio de la latitud de la base, es decir, de una sección horizontal cualquiera del muro.

Si en aquella de estas dos fórmulas, aplicable al caso, se sustituye P, d y b por sus valores en función de las coordenadas z y x, se obtendrá la ecuación de la curva que se busca.

Por de pronto, la distancia d tiene por expresión

$$d = \frac{\mathcal{M}\,P - \mathcal{M}\,Q}{P}.$$

Se conoce el empuje del agua

$$Q = \frac{\delta'' z^2}{2};$$

el momento de este empuje será

$$\mathcal{M}\,Q = \frac{\delta'' z^3}{6};$$

puede representarse el peso P por

$$P = \delta' \int_0^z x dz,$$

siendo el momento de este peso

$$\mathcal{M}\,P = MK \times \delta' \int_0^z x dz.$$

Para hallar MK , búscase la distancia KA del centro de gravedad G á la vertical OA; con este motivo se supondrá que la superficie OMA se halla dividida en fajas horizontales infinitamente estrechas; se tendrá para la suma de momentos de estas fajas

$$\frac{1}{2} \int_0^z x^2 dz;$$

por lo tanto, dividiendo esta suma por el área $\int_0^z x dz$, se obtiene para el brazo de palanca

$$KA = \frac{\frac{1}{2} \int_0^z x^2 dz}{\int_0^z x dz},$$

y resulta

$$MK = MA - KA = b - \frac{\frac{1}{2} \int_0^z x^2 dz}{\int_0^z x dz};$$

el momento del peso del muro será, pues,

$$\mathcal{M}\ \mathrm{P} = \delta'\left(b\int_0^z xdz - \frac{1}{2}\int_0^z x^2dz\right),$$

y la distancia d tendrá por expresión

$$d = \frac{6b\int_0^z xdz - 3\int_0^z x^2dz - \frac{\delta''}{\delta'}\,z^3}{6\int_0^z xdz}.$$

La base b es igual á x; puede hacerse la sustitución de P, b y d, en las dos fórmulas del trapecio, y se llegará para la curva del paramento exterior á una de las dos ecuaciones siguientes:

$$3\int_0^z x^2dz - 2x\int_0^z xdz - \rho x^2 + \frac{\delta''}{\delta'}\,z^3 = 0;$$

$$4\left(\int_0^z xdz\right)^2 - 6\rho x\int_0^z xdz + 3\rho\int_0^z x^2dz + \rho\,\frac{\delta''}{\delta'}\,z^3 = 0.$$

Deberá aplicarse la primera ó la segunda de estas dos ecuaciones, según se verifique $d > \frac{b}{3}$ ó $d < \frac{b}{3}$.

Las dos fórmulas que anteceden no se prestan para obtener una solución exacta, pudiendo sólo ser ésta aproximada. Carecen de utilidad para conseguir un perfil práctico, y además únicamente conciernen la curva intermedia EG de la figura 82. Los cálculos á que conduciría la determinación de las dos curvas inferiores GD y HA son impracticables, aun empleando métodos de aproximación.

Se evitan las dificultades obteniéndose resultados suficientemente exactos para las aplicaciones, reemplazando estas curvas por contornos poligonales, que se determinan sujetándolos á la

condición de dar lugar en cada vértice del contorno exterior, y estando lleno el embalse, á una presión unitaria igual al límite impuesto como máximo, y á otra del mismo valor en los ángulos del polígono interior cuando el depósito está vacío.

187. Volvamos á la fig. 82, y desígnese por a la latitud de coronación CB; se ha dicho que podía darse al cuerpo superior CBFE una sección completamente rectangular hasta cierta altura; debe ésta ser tal, que la presión en E tenga el valor límite asignado. Se verifica $\mathcal{M}\,Q = \frac{\delta''}{6}H^3$ para el momento del empuje, y también $P = \delta' a H$ para el peso del cuerpo rectangular, cuyo momento es $\mathcal{M}\,P = \frac{\delta'}{2}a^2 H$: pueden sustituirse estos valores en la expresión general de d, y resultará

$$d = \frac{3\delta' a^2 - \delta'' H^2}{6\delta' a}.$$

Poniendo este valor en las dos fórmulas del trapecio (**11**), se llega á las dos ecuaciones

$$\delta'' H^3 + \delta' a^2 H - \rho a^2 = 0;$$

$$\delta'' \rho H + 4\delta' a^2 H - 3\delta' \rho a^2 = 0.$$

La primera es de tercer grado con respecto á H, y se refiere al caso en que $d > \frac{b}{3}$; la otra, de segundo grado, se aplica cuando $d < \frac{b}{3}$.

No se sabe de antemano cuál de las dos ecuaciones deberá emplearse para obtener la altura del rectángulo; podemos afirmar, sin embargo, que atendidas las latitudes que en la práctica suele exigir la coronación de las presas de embalse, casi siempre deberá utilizarse la segunda. En efecto; si en la anterior expresión de d se pone por esta distancia el tercio de

la base, es decir, haciendo $d = \frac{a}{3}$, resulta

$$2\delta' a^2 = 3\delta' a^2 - \delta'' H^2,$$

de donde se deduce

$$H = a\sqrt{\frac{\delta'}{\delta''}},$$

lo que señala la relación existente entre a y H, cuando la resultante pasa por el tercio de la base.

Si en la segunda de las dos fórmulas del trapecio se hace $d = \frac{a}{3}$, reemplazando al mismo tiempo P por $\delta' a H$, y la altura H por el valor que acaba de obtenerse, resulta

$$\rho = 2\delta' H = 2\delta' a \sqrt{\frac{\delta'}{\delta''}},$$

de donde se deduce

$$a = \frac{\rho}{2\delta'\sqrt{\frac{\delta'}{\delta''}}}.$$

Haciendo en esta fórmula

$$\rho = 60.000 \text{ kilog.}; \quad \delta' = 2.200 \text{ k.}; \quad \delta'' = 1.000 \text{ k.},$$

queda el valor de a igual á $9^m,19$. Con una presión por metro cuadrado de 80.000 kil., resultaría $a = 12^m,25$.

Estas latitudes son muy superiores á las que generalmente se adoptan para las presas de embalse; puede, pues, decirse que en la gran mayoría de los casos la resultante pasará á una distancia de la arista de giro menor que el tercio de dicha latitud; por lo tanto, será la segunda de las fórmulas del trapecio la que deberá emplearse para obtener la altura del cuerpo superior rectangular.

188. Ocupémonos del cuerpo intermedio EFGH (fig. 82); se trata de hallar su altura, que designaremos por H′, y el contorno exterior, de modo que la presión unitaria en cualquier punto de este contorno, sea igual al límite propuesto cuando esté lleno el embalse; al mismo tiempo deberá verificarse la misma presión en el punto H, al encontrarse el embalse sin agua.

Admítase por de pronto que el perfil EG sea rectilíneo; designando por x su proyección horizontal, tendremos dos incógnitas x y H′, que se determinarán empleando las dos ecuaciones relativas á los casos de hallarse el embalse lleno y después vacío. Se formará como antes la expresión del empuje del agua, sobre toda la altura BH, que da lugar á una función de H′. Con la misma facilidad se expresará el peso del macizo CBGH y su momento con respecto á G, en función de x y de H′; podrá entonces determinarse la distancia d. Poniendo el valor de d, así como los de P y de la base $b = a + x$ en las dos fórmulas del trapecio, se llega á dos ecuaciones, que designamos como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, H') = 0 \\ f_2(x, H') = 0 \end{array}\right\} p.$$

Supóngase ahora vacío el embalse; se hallará en este caso, con más sencillez aún, la longitud d, que debe estar referida á la arista interior de la base; será la distancia del centro de gravedad del conjunto de los dos cuerpos superior é intermedio al paramento vertical interior. Sustituyendo de la misma manera los valores de d, P y b en las dos ecuaciones del trapecio, se obtiene otro grupo de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x, H') = 0 \\ \varphi_2(x, H') = 0 \end{array}\right\} v.$$

Si se combinan una de las ecuaciones del grupo p con otra del grupo v, se podrán hallar los valores de x y de H′; pero

como las ecuaciones son de 3.° y 4.° grado, será preciso resolver una ecuación de 6.° al 8.° grado. No estriba en esto la principal dificultad, sino en saber cuál de las dos ecuaciones del grupo [p] debe combinarse con otra del grupo [v]. Los índices 1 y 2 que afectan á estas funciones se refieren, el primero á la condición $d > \frac{b}{3}$, y el segundo, cuando se verifica $d < \frac{b}{3}$; así es que si después de haber calculado las distancias d relativas á los casos de depósito lleno y vacío, las relaciones de estas distancias con el ancho de la base no concuerdan con las hipótesis que implican las dos ecuaciones combinadas, deberá rehacerse la operación escogiendo una nueva combinación. Podrá esto dar lugar á un tanteo que aumente mucho los cálculos.

189. Hemos supuesto rectilínea la sección del paramento exterior del cuerpo intermedio; pero es más económico darle un contorno poligonal cóncavo, pues de no hacerlo, sucederá que la presión unitaria máxima entre las extremidades de la recta que forma el perfil, será inferior al tipo adoptado para la presión y esto indicará un exceso de resistencia.

Se obtiene el nuevo contorno dividiendo la superficie EFHG (fig. 84), en un número cualquiera de partes iguales, en tres, por ejemplo. Para calcular la primera faja EFJL, cuyo paramento exterior es un plano inclinado y el interior vertical, sólo se necesita conocer la proyección horizontal de EJ, proyección que se designará por x; esta incógnita exige una ecuación que se obtiene sustituyendo los valores de d, P y b en una de las dos fórmulas del trapecio y para el caso de estar lleno el depósito. El cálculo es fácil, pues la ecuación resultante es de segundo grado; todo consiste en acertar en la elección de una de dichas dos fórmulas. Asimismo se procederá hasta la penúltima faja inclusive; todas estas fajas tienen asignada de antemano su altura, y la ecuación no contiene más que la incógnita x. Pero al acercarse á la última sección GH, y al querer determinar la altura de la faja de modo que su base coincida exactamente con dicha sección, además de la incógnita x, será

preciso hallar también H'. Se procederá, como hemos indicado, cuando todo el contorno EG era rectilineo; se obtienen las dos incógnitas x y H' por medio de dos ecuaciones de 3.° ó 4.° grado, que deben escogerse, como antes, de los dos grupos [p] y [v].

Conviene observar que al calcular una faja parcial cualquiera, para obtener el peso P y el empuje Q, debe atenderse á todo el macizo situado encima de la base de dicha faja. Los momentos han de referirse también á la arista de la misma base.

190. Queda por calcular el cuerpo inferior GHAD, cuya altura puede ser más ó menos considerable. Se efectuará el cálculo dividiendo igualmente este cuerpo en fajas de una altura determinada de antemano. Se tendrán dos incógnitas, que son la proyección horizontal x del paramento exterior rectilíneo de la faja, y la proyección horizontal del paramento interior, designada por y.

Siguiendo el mismo sistema, y considerando sucesivamente al embalse como lleno y como vacío, se llega á los dos siguientes grupos de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{array}\right\} (p');$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x, y) = 0 \\ \varphi_2(x, y) = 0 \end{array}\right\} (v').$$

Todas ellas son de segundo grado; por lo tanto, solo habrá que resolver ecuaciones de cuarto grado; pero debe escogerse convenientemente la de cada grupo, para que el resultado se halle en armonía con la elección hecha.

Puede verse el desarrollo de estas ecuaciones en la memoria de *M. Delocre*, así como otras cuestiones interesantes que se refieren al estudio de los grandes muros de contención.

191. Nos proponemos principalmente en este artículo indicar la marcha seguida y disposición adoptada en los cálculos

numéricos que hemos efectuado para fijar la sección de la presa del Villar, que por su forma y dimensiones ofrece gran analogía con la presa de Furens.

Bajo la dirección y con el valioso concurso del Inspector general del Cuerpo de Caminos D. José Morer, entonces director del Canal de Isabel II, fuimos encargados del proyecto y construcción de esta importante obra, que asegura por completo el abastecimiento de agua en Madrid, y cuya iniciativa es debida á aquel distinguidísimo ingeniero.

192. Al observar la gran extensión de límites, entre los que se halla comprendida la presión unitaria á que puede someterse la mampostería, desde 4 kilogramos por centímetro cuadrado, propuestos por *M. Zazilly*, hasta la carga de 15 kilogramos por igual unidad superficial, que se deduce de la disposición adoptada en el antiguo muro del pantano de Almansa, se viene en conocimiento de que es inútil llevar demasiado lejos la exactitud en los cálculos conducentes á la determinación del perfil de una presa de embalse. Es suficiente conseguir cierta aproximación, que se obtiene reemplazando la curva teórica por un contorno poligonal. Pero aun así, no es necesario hacer coincidir exactamente los vértices de este contorno con las secciones horizontales divisorias de los tres cuerpos de que se compone la sección vertical del muro. Tampoco es indispensable aproximar mucho las divisiones; creemos suficiente una separación de 6 metros. Si se quiere hacer desaparecer el efecto que producen los ángulos entrantes de semejante polígono, no hay más que reemplazarlo, una vez hechos los cálculos, por otro de mayor número de lados, de modo que la nueva sección resulte con igual superficie. Para la facilidad de ejecución, es preferible este medio al trazado de una curva. En la presa del Villar hemos procedido por fajas de 2 metros de altura, habiendo resultado un paramento cuyo aspecto no difiere á la vista del que podría ofrecer una superficie continua.

Los cálculos que exige la determinación de un perfil de presa no ofrecen la menor dificultad, pero son bastante largos y podrían llegar á ser muy pesados, si no se establecieran con

orden y claridad. Veremos, además, con el ejemplo numérico propuesto más adelante, que al proceder con este cuidado se evitan los tanteos á que podría dar lugar una mala elección de las dos fórmulas del trapecio, no siendo necesario volver atrás al objeto de rehacer las operaciones relativas á cada una de las fajas, operaciones que se van comprobando á medida de su ejecución.

Pero antes de exponer detalladamente este ejemplo, es necesario hablar de una corrección que debe introducirse en el principio que ha servido de base á los cálculos anteriormente indicados.

En uno de los últimos artículos del capítulo IV, el relativo á los muros para depósitos de distribución (**168**), indicamos la necesidad de evitar que el encuentro con la base, de la resultante de las fuerzas que obran sobre el muro, se verificase en el tercio anterior de la latitud de dicha base, al efecto de impedir la contrapresión que sin esto tendría lugar en la arista opuesta á la de giro, lo cual podría ocasionar la rotura de la fábrica y la introducción del líquido en la misma. Se concibe que con mayor motivo debe precaverse este defecto en una gran presa de embalse sometida á una enorme carga de agua.

Al ocuparnos de los muros con paramentos completamente planos, no consideramos la distancia de la resultante á la arista de giro más que en la base, por ser esta distancia relativamente mayor en las secciones horizontales superiores; pero tratándose de un perfil de igual resistencia, es preciso atender á puntos situados á diferentes alturas.

En la parte alta de las grandes presas, y sobre todo en la base del cuerpo superior rectangular, es donde más hay que temer una aproximación demasiado grande entre la resultante y la arista exterior, con cuyo motivo la mayoría de los ingenieros que han proyectado construcciones de esta índole, han tratado de corregir el perfil teórico, haciendo partir la curvatura ó la inclinación del paramento, de la coronación misma. Pero será más sencillo, al efectuar el cálculo, imponerse desde luego la condición de hacer pasar la resultante por el punto situado al

tercio de la base, sin necesidad de comprobar la distancia á *posteriori*.

193. La sección de presa, que como ejemplo de cálculo vamos á determinar, tendrá en la parte superior una latitud de 5 metros, y se dividirá en fajas horizontales de 6 metros de altura, incluso la primera. Se adoptarán, además, las siguientes anotaciones:

H Altura desde la coronación hasta la base de cada una de las distintas fajas.

P Suma de pesos por encima de la base de cada faja, incluyendo el del agua que carga sobre el paramento interior, si éste presenta inclinación.

d Distancia del punto de paso de la resultante á la arista exterior de la base, cuando el embalse está lleno.

d' Distancia análoga á la anterior, pero referida á la arista interior y en el caso de estar vacío el embalse.

ρ Presión unitaria en la arista exterior de la base, teniendo en cuenta el empuje del agua.

ρ' Presión unitaria en la arista interior cuando no hay agua.

b Ancho de la base superior de una faja.

B Ancho de la base inferior.

x Proyección horizontal del talud exterior de la faja.

y Proyección horizontal del talud interior.

Las únicas incógnitas que hay que determinar son las proyecciones x, y. Se supondrá siempre que el metro cúbico de mampostería pesa 2.200 kilogramos, y adoptaremos como máxima presión la cantidad de 60.000 kilogramos por metro cuadrado.

Se ha obtenido (**187**) para la relación existente entre la altura del cuerpo superior rectangular y su latitud, cuando la resultante pasa al tercio de la base,

$$\frac{\text{H}}{\text{a}} = \sqrt{\frac{\delta'}{\delta''}},$$

relación que equivale á la raíz cuadrada del cociente de la densidad de la fábrica dividida por la del agua.

Si en dicha relación se hace

$$a = 5^{m},00, \quad \delta'' = 1.000 \text{ kil.} \quad \text{y} \quad \delta' = 2.200 \text{ kil.},$$

resulta $H = 7^{m},41$. Es la altura que puede darse al citado cuerpo, sin temor de que en ninguno de sus puntos la distancia de la resultante á la arista de giro sea menor que el tercio de la base. Adviértase que la relación $\frac{5}{7,4}$, entre el ancho y la altura, es equivalente á $\frac{2}{3}$, relación hallada (**169**) al estudiar los muros para depósitos de distribución; era natural encontrar aquí el mismo resultado.

194. No asignamos, sin embargo, más que 6 metros de altura al cuerpo superior rectangular, lo mismo que á las demás fajas que hemos calculado hasta la novena. En los siguientes estados se indican las operaciones efectuadas y los resultados obtenidos; al finalizar el último, se dan á continuación las oportunas aclaraciones:

1.ª Faja. $\begin{cases} H = 6^{m},00 \\ b = 5^{m},00 \end{cases}$

Pesos mamp. rect. $5^{m},00 \times 6^{m},00 \times 2.200^{k.} = 66.000^{k.}$

$$P = 66.000$$

Mom. mamp. rect. $66.000 \times 2^{m},50 = 165.000$

» empuje $6^{m} \times 3^{m} \times 1.000^{k.} \times 2^{m} = 36.000$

$$\Sigma \mathcal{M} = 129.000$$

$P = 66.000^{k.}$

$\mathcal{M}\,P = 165.000$

$\Sigma \mathcal{M} = 129.000$

$$d = \frac{\Sigma \mathcal{M}}{P} = 1^{m},96$$

$$\frac{d}{B} = \frac{1,96}{5,00} = 0,39$$

$$\rho = \frac{2P}{B}\left(2 - \frac{3d}{B}\right) = 21.753^{k.}$$

$$d' = B - \frac{\mathcal{M}\,P}{P} = 2^{m},50$$

$$\frac{d'}{B} = \frac{2,50}{5,00} = 0,50$$

$$\rho' = \frac{P}{B} = 13.200^{k}$$

2.ª Faja. $\begin{cases} H = 12^m,00 \\ b = \ \ 5^m,00 \end{cases}$

Pesos mam. rect.	$5^m,00 \times 6^m,00 \times 2.200^{k.} =$	$66.000^{k.}$	
» » trian.	$6\ \ ,00 \times \dfrac{x}{2} \times 2.200 =$		$6.600\,x$
» superiores	$=$	66.000	
	$P =$	132.000	$+\,6.600\,x$

Mom. mamp. rect.	$66.000 \times (2^m,50 + x) =$	$165.000 +$	$66.000x$	
» » trian.	$6.000\,x \times \dfrac{2}{3}\,x =$			$4.400x^2$
» super.		$165.000 +$	$66.000x$	
	$\mathcal{M}\,P =$	$330.000 +$	$132.000x +$	$4.400x^2$
» empuje	$12^m \times 6^m \times 1.000^{k.} \times 4^m =$	288.000		
	$\Sigma\,\mathcal{M} =$	$42.000 +$	$132.000x +$	$4.400x^2$

$$\frac{B}{3} = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} \qquad\qquad x^2 + 35\,x = 80.909$$

$x = 2^m,17$

$P = 146.322^{k.}$

$\mathcal{M}\,P = 637.159$

$\Sigma\,\mathcal{M} = 349.159$

$$d = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} = 2^m,39$$

$B = 5,00 + x = 7,17$

$$\frac{d}{B} = \frac{2,39}{7,17} = 0,33$$

$$\rho = \frac{2P}{B} = 40.805^{k.}$$

$$d' = B - \frac{\mathcal{M}\,P}{P} = 2^m,82$$

$$\frac{d'}{B} = \frac{2,82}{7,17}$$

$$\rho = \frac{2P}{B}\left(2 - \frac{3d'}{B}\right) = 33.468^{k.}$$

3.ª Faja $\begin{cases} H = 18^m,00 \\ b = 7\ ,17 \end{cases}$

Pesos mamp. rect. $7^m,17 \times 6,00 \times 2.200^{k.} = 94.644$

» » trian. $6\ ,00 \times \frac{x}{2} \times 2.200 = \qquad 6.600x$

» superiores $= 146.322$

$$P = 240.966 + 6.600x$$

Mom. mamp. rect. $94.644 \times (3^m,585 + x) = 339.298 + 94.644x$

» » trian. $6.600x \times \frac{2}{3}x = \qquad 4.400x^2$

» superiores $= 637.159 + 146.322x$

$$\mathcal{M}\,P = 976.457 + 240.966x + 4.400x^2$$

» empuje $18^m \times 9^m \times 1.000^{k.} \times 6^m = 972.000$

$$\Sigma\,\mathcal{M} = 4.457 + 240.966x + 4.400x^2$$

$$\frac{B}{3} = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} \qquad x^2 + 65,85\,x = 259,75$$

$x = 3^m,73$

$P = 265.584^{k.}$

$\mathcal{M}\,P = 1936.477$

$\Sigma\,\mathcal{M} = 964.477$

$d = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} = 3^m,63$

$B = 7,17 + x = 10^m,90$

$\frac{d}{B} = \frac{3,63}{10,90} = 0,39$

$\rho = \frac{2P}{B} = 48.731^{k.}$

$d' = B - \frac{\mathcal{M}\,P}{P} = 3^m,61$

$\frac{d'}{B} = \frac{3,61}{10,90} = 0,331$

$\rho' = \frac{2P}{3d'} = 49.046^{k.}$

4.ª Faja $\begin{cases} H = 24^{m},00 \\ b = 10\ ,90 \end{cases}$

Pesos mamp. rect. $10^{m},90 \times 6^{m},00 \times 2.200^{k.}$	$= 143.880$	
» » trian. $6,00 \times \frac{x}{2} \times 2.200$	$=$	$6.600\,x$
» superiores	$= 265.584$	
	$P = 409.464 +$	$6.600\,x$

Mom. rect. $143.880 \times (5^{m},45 + x) =$	$784.146 + 143.880x$
» trian. $6.600 \times \frac{2}{3} =$	$4,400\,x^2$
» superiores $=$	$1.936.477 + 265.584x$
$\mathcal{M}\,P =$	$2.720.623 + 409.464x + 4.400\,x^2$
» emp. $24^{m} \times 12^{m} \times 1.000^{k.} \times 8^{m} =$	$2.304.000$
$\Sigma\,\mathcal{M} =$	$416.623 + 409.464x + 4.400\,x^2$

$$\frac{B}{3} = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} \qquad x^2 + 113,18\,x = 486,860$$

$x = 4^{m},14$

$P = 436.788^{k.}$

$\mathcal{M}\,P = 4491.218$

$\Sigma\,\mathcal{M} = 2187.218$

$$d = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} = 5^{m},01$$

$B = 10,90 + x = 15^{m},04$

$$\frac{d}{B} = \frac{5,01}{15,04} = 0,33$$

$$\rho = \frac{2P}{B} = 58.083^{k.}$$

$$d' = B - \frac{\mathcal{M}\,P}{P} = 4^{m},76$$

$$\frac{d'}{B} = \frac{4,76}{15,04} = 0,31$$

$$\rho' = \frac{2P}{3d'} = 61.174^{k.}$$

5.ª Faja. Cálculo de y.
$$\left\{\begin{aligned} H &= 30^m,00 \\ b &= 15\ ,04 \\ x' &= 4\ ,14 \end{aligned}\right.$$

Pesos mamp. rect.	$15^m,04 \times 6^m,00 \times 2.200^k = 198.528$		
» » tri. ext.	$4\ ,14 \times 3\ ,00 \times 2.200 = 27.324$		
» » » int.	$6\ ,00 \times \frac{y}{2} \times 2.200 =$		$6.600\ y$
» » superiores		436.788	
		$P_1 = 662.640 + 6.600\ y$	

Mom. rect.	$198.528 \times (7^m,52 + y) = 1.492.931 + 198.528\ y$	
» tri. ext.	$27.324 \times (16,42 + y) = 448.660 + 27.324\ y$	
» » int.	$6.600 \times \frac{2}{3}\ y =$	$4.400\ y^2$
» superiores	$436.788 \times (4,76 + y) = 2.079.111 + 436.788\ y$	
	$\mathcal{M}\ P_1 = 4.020.702 + 662.640\ y + 4.400\ y^2$	

$$2\ P_1B_1 - 3\ \Sigma\ \mathcal{M} = 30.000\ B^2 \qquad y^2 + 52\ y = 77,353$$

$y = 1^m,44$

$P_1 = 672.144^k$

$\mathcal{M}\ P_1 = \Sigma\ \mathcal{M} = 4994,026$

$$d_1 = \frac{\mathcal{M}\ P_1}{P_1} = 7^m,41$$

$B_1 = 19,18 + y = 20^m,62$

$$\frac{d_1}{B_1} = \frac{7,41}{20,62} = 0,359$$

$$\rho_1 = \frac{2P_1}{B_1}\left(2 - \frac{3d}{B_1}\right) = 60.108^{\ k}$$

5.ª Faja. Cálculo de x.
$$\left\{\begin{aligned} H &= 30^m,00 \\ b &= 15\ ,04 \\ y &= 1\ ,44 \end{aligned}\right.$$

Pesos mamp. rect.	$15^m,04 \times 6^m,00 \times 2.200^k = 198.528$		
» » tri. ext.	$6,00 \times \frac{x}{2} \times 2.200 =$		$6.600\ x$
» » tri. int.	$1,44 \times 3\ ,00 \times 2.200 = 9.504$		
» agua tri.	$1,44 \times 15\ ,00 \times 1.000 = 21.600$		
» » »	$1,44 \times 12\ ,00 \times 1.000 = 17.280$		
» superiores	$= 436.788$		
		$P = 683.700 + 6.600\ x$	

Mom. mamp. rect.	$198.528 \times (7^{m},52 + x)$	$= 1492.931 + 198.528x$	
» » tri. ext.	$6.600x \times \frac{2}{3} x$	$=$	$4.400x^2$
» » » int.	$9.504 \times (15,52 + x)$	$= 147.502 + 9.504x$	
» agua tri.	$21.600 \times (16,00 + x)$	$= 345.600 + 21.600x$	
» » »	$17.280 \times (15,52 + x)$	$= 268.185 + 17.280x$	
» superiores		$= 4.491.218 + 436.788x$	

$$\mathcal{M}\,P = 6.745.436 + 683.700x + 4.400x^2$$

» empuje $30^{m.} \times 15^{m.} \times 1.000^{k.} \times 10^{m.} = 4.500.000$

$$\Sigma\,\mathcal{M} = 2.245.436 + 683.700x + 4.400x^2$$

$$2PB - 3\,\Sigma\,\mathcal{M} = 30.000\,B^2 \qquad x^2 + 48,5\,x = 255,024$$

$x = 4^{m},78$

$P = 715.248^{k}$

$\mathcal{M}\,P = 10.114.055$

$\Sigma\,\mathcal{M} = 5614.055$

$$d = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} = 7^{m},85$$

$$B = 16,48 + x = 21^{m},26$$

$$\frac{d}{B} = \frac{7,85}{21,26} = 0,37$$

$$\rho = \frac{2P}{B}\left(2 - \frac{3d}{B}\right) = 60.086^{k.}$$

Pesos sin agua rec.	=	198.528k.
tri. ext.	=	31.548
» int.	=	9.504
superior.	=	436.788
P'	=	676.368

Mom. sin agua rect.	198.528	$\times\ 8^{m},96$	=	1.778.811
tri. ext.	31.548	$\times\ 18,07$	=	570.072
» int.	9.504	$\times\ 0,96$	=	9.124
super.	436.788	$\times\ 6,20$	=	2.708.086
		$\mathcal{M}\,P'$	=	5.066.093

$$d' = \frac{\mathcal{M}\,P'}{P'} = 7^{m},49 \qquad \rho' = \frac{2P'}{B}\left(2 - \frac{3d'}{B}\right) = 60.001^{k.}$$

$$\frac{d'}{B} = \frac{7,49}{21,26} = 0,35$$

6.ª Faja
Cálculo de y.

$$\begin{cases} H = 36^{m},00 \\ b = 21\ ,26 \\ x' = 4\ ,78 \end{cases}$$

Pesos mamp. rect. $21^{m},26 \times 6^{m},00 \times 2.200^{k.} = 280.632$

» » tri. int. $6\ ,00 \times \frac{y}{2} \times 2.200 = \qquad 6.600\,y$

» » » ext. $4\ ,78 \times 3\ ,00 \times 2.200 = 31.548$

» superiores $= 676.368$

$P_1 = 988.548 + 6.600y$

Mom. mamp. rect. $280.632 \times (10,63 + y) = 2.983.118 + 280.632y$

» » tri. int. $6.600y \times \frac{2}{3}\,y = \qquad 4.400y^2$

» » » ext. $31.548 \times (22,85 + y) = 720.872 + 31.548\,y$

» superiores $= 5.066.093 + 676.368y$

$\mathcal{M}\,P_1 = 8.770.083 + 988.548y + 4.400y^2$

$$2P_1B_1 - 3\,\Sigma\,\mathcal{M} = 30.000\,B_1^2 \qquad y^2 + 73,57\,y = 161,03$$

$y = 2^{m},12$

$P_1 = 1002540^{k.}$

$\mathcal{M}\,P_1 = \Sigma\,\mathcal{M} = 10.885.579$

$$d_1 = \frac{\mathcal{M}\,P_1}{P_1} = 10^{m},85$$

$B_1 = 26,04 + y = 28^{m},16$

$$\frac{d_1}{B_1} = \frac{10,85}{28,16} = 0,385$$

$$\rho_1 = \frac{2P_1}{B_1}\left(2 - \frac{3d_1}{B_1}\right) = 60.095^{k.}$$

6.ª Faja. Cálculo de x. $\begin{cases} H = 36^m,00 \\ b = 21,26 \\ y = 2,12 \end{cases}$

Pesos mamp. rect.	$21^m,26 \times$	$6^m,00 \times$	$2.200^{k.}$	=	280.632	
» » tri. ext.	6 ,00 $\times$	$\frac{x}{2}$	$\times 2.200$	=		6.600 x
» » » int.	2 ,12 $\times$	3,00	$\times 2.200$	=	13.992	
» agua tri.	2 ,12 $\times$	18,00	$\times 1.000$	=	38.160	
» » »	2 ,12 $\times$	15,00	$\times 1.000$	=	31.800	
» superiores				=	715.248	

$$P = 1.079.832 + 6.600\,x$$

Mom. mamp. rect.	$280.632 \times (10,63+x) =$	$2.983.118 +$	$280.632x$
» » tri. ext.	$6.600x \times \frac{2}{3}\,x =$		$4.400x^2$
» » » int.	$13.992 \times (21,97+x) =$	$307.404 +$	$13.992x$
» agua tri.	$38.160 \times (22,67+x) =$	$865.087 +$	$38.160x$
» » » int.	$31.800 \times (21,97+x) =$	$698.646 +$	$31.800x$
» superiores	=	$10.114.055 +$	$715.248x$

$$\mathcal{M}\,P \quad 14.968.310 + 1.079.832x + 4.400x^2$$

» empuje $36^m \times 18^m \times 1.000^{k.} \times 12^m = 7.776.000$

$$\Sigma\,\mathcal{M} \quad 7.192.310 + 1.079.832x + 4.400x^2$$

$$2\,PB - 3\Sigma\,\mathcal{M} = 30.000\,B^2 \qquad x^2 + 73,47\,x = 417,242$$

$x = 5^m,36$

$P = 1.115.208^{k.}$

$\mathcal{M}\,P = 20.882.619$

$\Sigma\,\mathcal{M} = 13.106.619$

$d = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} = 11^m,75$

$B = 23,38 + x = 28^m,74$

$\frac{d}{B} = \frac{11,75}{28,74} = 0,40$

$\rho' = \frac{2P}{B}\left(2 - \frac{3d}{B}\right) = 60.227$

Pesos de vacío rect.	=	280.632$^{k.}$
tri. ext.	=	35.376
» int.	=	13.992
super.	=	676.368
	P′ =	1.006.368

Mom. de vacío rect.	280.632 × 12,75	=	3.578.058
tri. ext.	35.376 × 25,17	=	890.401
» int.	13.992 × 1,41	=	19.729
super.	676.368 × 9,61	=	6.499.896
		$\mathcal{M}$ P′ =	10.988.097

$$d' = \frac{\mathcal{M}\,P}{P} = 10^{m},92$$

$$\frac{d'}{B} = \frac{10,92}{28,74} = 0,38$$

$$\rho' = \frac{2P'}{B}\left(2 - \frac{3d'}{B}\right) = 60.227^{k.}$$

7.ª Faja.
Cálculo de y.

$$\begin{cases} H = 42^{m},00 \\ b = 28,74 \\ x' = 5,36 \end{cases}$$

Pesos mamp. rect.	$28^{m},74 \times 6^{m},00 \times 2.200^{k.}$	=	379.368	
» » tri. int.	$3,00 \quad y \times \quad \times 2.200$	=		$6.600\,y$
» » » ext.	$5,36 \times 3,00 \times 2.200$	=	35.376	
» superiores		=	1.006.368	
		P_1 =	1.421.112 +	$6.600\,y$

Mom. mamp. rect.	$379.368 \times (14,37 + y) =$	5.451.518 +	$379.368\,y$	
» » tri. int.	$6.600\,y \times \frac{2}{3}y =$			$+4.400\,y^2$
» » » ext.	$35.376 \times (30,53 + y) =$	1.080.029 +	$35.376\,y$	
» superiores	$=$	10.988.097 +	$1.006.368\,y$	

$$\mathcal{M}\,P_1 = 17.519.644 + 1.421.112\,y + 4.400\,y^2$$

$$2\,P_1B_1 - 3\,\Sigma\,\mathcal{M} = 30.000\,B_1^2 \qquad y^2 + 100{,}56\,y = 315{,}88$$

$y = 3^m{,}05$

$P_1 = 1.441.242^{k.}$

$\mathcal{M}\,P_1 = \Sigma\,\mathcal{M} = 21.894.967$

$$d_1 = \frac{\mathcal{M}\,P_1}{P_1} = 15^m{,}19$$

$B_1 = 34{,}10 + y = 37^m{,}15$

$$\frac{d_1}{B_1} = \frac{15{,}19}{37{,}15} = 0{,}40$$

$$\rho_1 = \frac{2P_1}{B_1}\left(2 - \frac{3d_1}{B_1}\right) = 60.058^{k.}$$

7.ª Faja.
Cálculo de x.

$$\begin{cases} H = 42^m{,}00 \\ b = 28{,}74 \\ y = 3{,}05 \end{cases}$$

Pesos mamp. rect.	$28^m{,}74$	$\times\ 6^m{,}00$	$\times\ 2.200^{k.}$	=	379.368	
» » tri. int.	3,05	$\times$ 3,00	$\times$ 2.200	=	20.130	
» » » ext.	3,00	$\times\ x$	$\times$ 2.200	=		$6.600\,x$
» agua tri.	3,05	$\times$ 21,00	$\times$ 1.000	=	64.050	
» » »	3,05	$\times$ 18,00	$\times$ 1.000	=	54.900	
» superiores				=	1.115.208	
				P =	1.633.656	$+\ 6.600\,x$

Mom. mam. rect.	$379.368 \times (14^m{,}37 + x)$ =	5.451.518 +	$379.368x$	
» » tri. int.	$20.130 \times (29{,}76 + x)$ =	599.069 +	$20.130x$	
» » » ext.	$6.600x \times \frac{2}{3}\,x$ =			$4.400x^2$
» agua tri.	$64.050 \times (30{,}72 + x)$ =	1.970.819 +	$64.050x$	
» » » int.ª	$54.900 \times (29{,}76 + x)$ =	1.633.824 +	$54.900x$	
» superiores	=	20.882.619 +	$1.115.208x$	
$\mathcal{M}$ P	=	30.537.849 +	$1.633.656x$	$+ 4.400x^2$
» empuje $42^m \times 21^m \times 1.000^{k.} \times 14^m$	=	12.348.000		
$\Sigma\,\mathcal{M}$	=	18.189.849 +	$1.633.656x$	$+ 4.400x^2$

$$2\,PB - 3\Sigma\,\mathcal{M} = 30.000\,B^2 \qquad x^2 + 104{,}05\,x = 632.672$$

$x = 5^m{,}76$

$P = 1.671.672^{k.}$

$\mathcal{M}\,P = 40.093.689$

$\Sigma\,\mathcal{M} = 27.745.689$

$$d = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} = 16^m{,}59$$

$$B = 31{,}79 + x = 37^m{,}55$$

$$\frac{d}{B} = \frac{16{,}59}{37{,}55} = 0{,}44$$

$$\rho = \frac{2P}{B}\left(2 - \frac{3d}{B}\right) = 60.100^{k.}$$

Pesos de vacío rect.	=	379.368k.
tri. int.	=	20.130
» ext.	=	38.016
super.	=	1.006.368
P′	=	1.443.882k.

Mom. de vacío rect.	379.368k.	× 17m,42	=	6.608.590
tri. int.	20.130	× 2,03	=	40.864
» ext.	38.016	× 33,71	=	1.281.519
super.	1.006.368	× 13,97	=	14.058.961
$\mathcal{M}$ P′			=	21.989.934

$$d' = \frac{\mathcal{M}\,P'}{P'} = 15^m{,}23$$

$$\frac{d'}{B} = \frac{15{,}23}{37{,}55} = 0{,}40$$

$$\rho' = \frac{2P'}{B}\left(2 - \frac{3d'}{B}\right) = 60.223^{k.}$$

8.ª Faja. Cálculo de y

$$\begin{cases} H = 48^m{,}00 \\ b = 37{,}55 \\ x' = 5{,}76 \end{cases}$$

Pesos mamp. rect.	37m,55	× 6m,00	× 2.200k.	=	495.660	
» » tri. int.	3,00	× y	× 2.200	=		6.600 y
» » » ext.	5,76	× 3,00	× 2.200	=	38.016	
» superiores				=	1.443.882	
P_1				=	1.977.558 + 6.600 y	

Mom. mam. rec. $495.660 \times (18{,}775 + y) = 9.306.016 + 495.660y$

» » tri. int. $6.600y \times \frac{2}{3} y = 4.400y^2$

» » » ext. $38.016 \times (39{,}47 + y) = 1.500.491 + 38.016y$

» superiores $1.443.882 \times (15{,}23 + y) = 21.990.323 + 1.443.882y$

$$\mathcal{M}\,P_1 = 32.796.830 + 1.977.558y + 4.400y$$

$$2\,P_1B_1 - 3\,\Sigma\,\mathcal{M} = 30.000\,B_1^2 \qquad y^2 + 133{,}48\,y = 554{,}43$$

$y = 4^m{,}03$

$P_1 = 2.004.156^k$

$\mathcal{M}\,P_1 = \Sigma\,\mathcal{M} = 40.837.849$

$$d_1 = \frac{\mathcal{M}\,P_1}{P_1} = 20^m{,}37$$

$B_1 = 43{,}31 + y = 47^m{,}34$

$$\frac{d_1}{B_1} = \frac{20{,}37}{47{,}34} = 0{,}43$$

$$\rho_1 = \frac{2P_1}{B_1}\left(2 - \frac{3d_1}{B_1}\right) = 60.054^k$$

8.ª Faja.
Cálculo de x.

$$\begin{cases} H = 48^m{,}00 \\ b = 37{,}55 \\ y = 4{,}03 \end{cases}$$

Pesos mamp. rect.	$37^m{,}55$	$\times$	$6^m{,}00 \times 2.200^k$	=	495.660^k	
» » tri. int.	4,03	$\times$	$3{,}00 \times 2.200$	=	26.598	
» » » ext.	3,00	$\times$	$x \times 2.200$	=		$6.600\,x$
» agua tri.	4,03	$\times$	$24{,}00 \times 1.000$	=	96.720	
» » »	4,03	$\times$	$21{,}00 \times 1.000$	=	84.630	
» superiores				=	1.671.672	

$$P = 2.375.280 + 6.600\,x$$

Mom. mam. rect. $495.660 \times (18^m{,}775 + x) = 9.306.016 + 495.660x$

» » » int. $26.598 \times (38{,}89 + x) = 1.034.396 + 26.598x$

» » tri. ext. $6.600\,x \times \frac{2}{3} x = 4.400x^2$

» agua tri. $96.720 \times (40{,}24 + x) = 3.892.201 + 96.720x$

» » » $84.630 \times (38{,}89 + x) = 3.291.260 + 84.630x$

» superiores $= 40.093.689 + 1.671.672x$

$$\mathcal{M}\,P = 57.617.562 + 2.375.280x + 4.400x^2$$

» empuje $48^m \times 24^m \times 1.000^k \times 16^m = 18.432.000$

$$\Sigma\,\mathcal{M} = 39.185.562 + 2.375.280x + 4.400x^2$$

$$2PB - 3\,\Sigma\,\mathcal{M} = 30.000\ B^2 \qquad x^2 + 144{,}04\,x = 936{,}82$$

$x = 6^m{,}23$

$P = 2.416.398^{k.}$

$\mathcal{M}\,P = 72.586.333$

$\Sigma\,\mathcal{M} = 54.154.333$

$$d = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}}{P} = 22^m{,}41$$

$B = 41{,}58 + x = 47^m{,}81$

$$\frac{d}{B} = \frac{22{,}41}{47{,}81} = 0{,}47$$

$$\rho = \frac{2P}{B}\left(2 - \frac{3d}{B}\right) = 60.043^{k.}$$

Pesos de vacío rec. =	495.660k.
tri. ext. =	26.598
» int. =	41.118
superior. =	1.443.882
P′ =	2.007.258

Mom. de vacío rect.	495.660 × 22,805	=	11.303.526
tri. ext.	26.598 × 2,69	=	71.549
» int.	41.118 × 43,66	=	1.795.216
super.	1.443.882 × 19,26	=	27.809.167
		$\mathcal{M}$P′ =	40.979.458

$$d' = \frac{\mathcal{M}\,P'}{P'} = 20^m{,}41$$

$$\frac{d'}{B} = \frac{20{,}41}{47{,}81} = 0{,}42$$

$$\rho' = \frac{2P'}{B}\left(2 - \frac{3d'}{B}\right) = 60.372$$

9.ª Faja.
Cálculo de y.

$$\begin{cases} H = 54^m{,}00 \\ b = 47{,}81 \\ x' = 6{,}23 \end{cases}$$

Pesos mamp. rect.	$47^m{,}81 \times 6^m{,}00 \times 2.200^{k.}$	=	631.092	
» » tri. ext.	$3{,}00 \times y \times 2.200$	=		$6.600\,y$
» » » int.	$6{,}23 \times 3{,}00 \times 2.200$	=	41.118	
» » superiores			2.007.258	

$$P_1 = 2.679.468 + 6.600\,y$$

Mom. mam. rect. $631.092 \times (23^m,90 + y) = 15.083.099 + 631.092y$

» » tri. int. $6.600\,y \times \frac{2}{3} y = \qquad 4.400x^2$

» » » ext. $41.118 \times (49,89 + y) = 2.051.377 + 41.118y$

» superiores $2.007.258 \times (20,41 + y) = 40.965.136 + 2.007.258y$

$$\mathcal{M}\,P_1 = 58.099.612 + 2.679.468y + 4.400y^2$$

$$2P_1B_1 - 3\,\Sigma\,\mathcal{M} = 30.000\,B_1^2 \qquad y^2 + 173,62\,y = 922,124$$

$y = 5^m,16$

$P_1 = 2.713.524^{k.}$

$\mathcal{M}\ P_1 = \Sigma\,\mathcal{M} = 72.042.819$

$$d_1 = \frac{\mathcal{M} P_1}{P_1} = 26^m,55$$

$B_1 = 54,04 + y = 59^m,20$

$$\frac{d_1}{B_1} = \frac{26,55}{59,20} = 0,45$$

$$\rho_1 = \frac{2P_1}{B_1}\left(2 - \frac{3d_1}{B_1}\right) = 60.045^{k.}$$

9.ª Faja.
Cálculo de x.

$$\begin{cases} H = 54^m,00 \\ b = 47,81 \\ y = 5,16 \end{cases}$$

Pesos mamp. rect. $47^m,81 \times 6^m,00 \times 2.200^{k.} = 631.092$

» » tri. int. $5,16 \times 3,00 \times 2.200 = 34.056$

» » » ext. $3,00 \times x \times 2.200 = \qquad 6.600x$

» agua $5,16 \times 27,00 \times 1.000 = 139.320$

» » $5,16 \times 24,00 \times 1.000 = 123.840$

» superiores $= 2.416.398$

$$P = 3.344.706 + 6.600x$$

Mom. mam. rect. $631.092 \times (23^m,90 + x) = 15.083.099 + 631.092x$

» » tri. int. $34.056 \times (49,53 + x) = 1.686.794 + 34.056x$

» » tri. ext. $6.600\ \frac{2}{3}\ x = \qquad 4.400x^2$

» agua $139.320 \times (51,25 + x) = 7.140.150 + 139.320x$

» » $123.840 \times (49,53 + x) = 6.133.795 + 123.840x$

» superiores $= 72.586.333 + 2.416.398x$

$$\mathcal{M}\,P = 102.630.171 + 3.344.706x + 4.400x^2$$

» emp. $54^m \times 27^m \times 1.000^{k.} \times 18^m = 26.244.000$

$$\Sigma\,\mathcal{M} = 76.386.171 + 3.344.706x + 4.400x^2$$

$x = 6^m,76$

$P = 3.389.322^{k.}$

$\mathcal{M}\, P = 125.441.452$

$\Sigma\, \mathcal{M} = 99.197.452$

$$d = \frac{\Sigma\, \mathcal{M}}{P} = 29^m,27$$

$$B = 52,97 + x = 59^m,73$$

$$\frac{d}{B} = \frac{29,27}{59,73} = 0,49$$

$$\rho = \frac{2P}{B}\left(2 - \frac{3d}{B}\right) = 60.148^{k.}$$

Pesos de vacío	rectángulo =	631.092k.
	tri. int. =	34.056
	» ext. =	44.616
	superiores =	2.007.258
	P' =	2.717.022

Mom. de vacío	rect.	631.092 × 29,065	=	18.342.689
	tri. int.	34.056 × 3,44	=	117.152
	» ext.	44.616 × 55,22	=	2.463.695
	super.	2.007.258 × 25.57	=	51.325.587
		$\mathcal{M}$ P'	=	72.249.123

$$d' = \frac{\mathcal{M}\, P'}{P'} = 26^m,59$$

$$\frac{d'}{B} = \frac{26,59}{59,73} = 0,44$$

$$\rho' = \frac{2P'}{B}\left(2 - \frac{3d'}{B}\right) = 60.500^{k.}$$

195. *Primera faja ó cuerpo superior rectangular.*—Ninguna incógnita encierra este cuerpo; sin embargo, conviene disponer, como se indican, los cálculos que deberán servir para las siguientes fajas, y sobre los cuales hay que dar pocas explicaciones.

Se han determinado: 1.° Las dos distancias d y d' que permiten trazar las curvas de presión referentes á los dos casos de estar lleno el embalse ó de encontrarse vacío. 2.° Las dos

relaciones $\frac{d}{B}$ y $\frac{d'}{B}$, que indicarán cuál de las dos fórmulas del trapecio debe emplearse para calcular la máxima presión. Adviértase que la primera de estas dos relaciones resulta igual á 0,39, es decir, superior á $\frac{1}{3}$, lo cual debía suceder, en atención á que no se han tomado más que 6 metros para la altura del primer cuerpo rectangular, mientras que podía haberse llegado hasta $7^m,41$. 3.° Por último, se han calculado las presiones unitarias ρ y ρ', aplicando la primera de las dos fórmulas del trapecio.

196. *Segunda faja.*—Con esta faja se consigue una altura total de 12 metros, que resulta superior á $7^m,41$. En vista de esto, es necesario dar al paramento exterior de dicha faja un talud que es preciso determinar.

Para obtener los pesos que deben tenerse en cuenta, se subdividirán siempre los trapecios en rectángulos y triángulos, lo cual facilita la determinación de sus momentos. Se tiene, pues, en este caso, el peso del rectángulo de la segunda faja; el del triángulo de la misma, cuya base es x (fig. 85), y por último, el del macizo que se halla encima y que ya ha sido anteriormente calculado.

Se forman los momentos multiplicando cada uno de los pesos por su respectivo brazo de palanca, y se obtienen las diferentes funciones de x, que se ordenan siempre con respecto á la incógnita. Los momentos superiores han de estar ahora referidos á la nueva arista de giro; por lo tanto, su brazo de palanca será $2^m,50 + x$. Pero el producto por 2,50 fué calculado antes, habiendo dado por resultado 165.000, cantidad que se pone debajo de los otros momentos; en la misma línea horizontal se agrega el producto de los pesos superiores por x, ó sea $66.000 \times x$. Después de sumar todos estos momentos, se resta del total el momento del empuje horizontal del agua y se obtiene la suma algebráica $\Sigma\mathcal{M}$.

Para hallar la proyección x del talud exterior de la faja que se calcula, es necesario expresar que la resultante de las

fuerzas que actúan sobre el macizo pasa por el punto situado al tercio de la base, es decir, establecer $d = \frac{B}{3}$; lo que equivale á

$$\frac{\Sigma \mathcal{M}}{P} = \frac{B}{3} \qquad \text{ó} \qquad PB = 3\Sigma \mathcal{M}.$$

Se han obtenido $\Sigma \mathcal{M}$ y P en función de x; la base B es igual á $b + x$ y conocemos el valor numérico de la base superior b, (en este caso $5^m,00$); se llega por lo tanto, á la ecuación de 2.° grado

$$x^2 + 35\,x = 80,909;$$

de la que se deduce $x = 2^m,17$, para la proyección del talud exterior. Sustituyendo este resultado en las expresiones de P, $\mathcal{M}$ P y $\Sigma \mathcal{M}$, se obtienen los números que se indican en el estado, los cuales han de servirnos para hallar los demás elementos.

Se determinan después la distancia $d = \frac{\Sigma \mathcal{M}}{P}$ y la base inferior $B = b + x$, verificando á continuación la relación $\frac{d}{B}$, que ha de resultar igual á $\frac{1}{3}$. Por último, se obtendrá la máxima presión unitaria ρ, aplicando sencillamente la segunda de las dos fórmulas del trapecio $\rho = \frac{2P}{B}$, que da por resultado el doble de la presión media.

Deben hallarse ahora los elementos relativos al caso de estar vacío el embalse. Se obtiene la distancia d' de la resultante á la arista interior de la base, restando de la latitud B de la misma el brazo de palanca del peso de la fábrica, referido á la arista exterior, brazo de palanca que tiene por expresión $\frac{\mathcal{M} P}{P}$. Se determina después la relación $\frac{d'}{B}$ que resulta su-

perior á $\frac{1}{3}$, y no queda más que calcular la máxima presión ρ' en la arista interior, aplicando la primera fórmula del trapecio (**11**).

197. *Tercera faja.*—Los cálculos de esta faja son del todo semejantes á los de la anterior y se disponen de la misma manera. Se determinan siempre los momentos superiores, multiplicando el peso total que carga sobre la faja por el nuevo brazo de palanca con respecto á la arista anterior de la base. Designando por k el brazo de palanca, referido á F, del conjunto de las dos primeras fajas CBED y DELF (fig. 86), cuyos pesos constituyen los superiores y tienen por valor 146.322, el momento de este conjunto, con respecto al punto M, tendrá por brazo de palanca $k + x$; pero el producto por k ha sido determinado en el estado anterior, dando por resultado 637.159; debe, pues, escribirse esta cantidad y agregarle el producto por x, con lo que se obtiene $637.159 + 146.322\, x$, para el nuevo momento.

La relación $\frac{d}{B}$ debe asimismo resultar igual á $\frac{1}{3}$; la análoga $\frac{d'}{B}$, relativa al caso de estar vacío el embalse, produce una fracción ligeramente inferior y exige siempre la aplicación de la segunda de las dos fórmulas del trapecio $\rho' = \frac{2P}{3d'}$, para obtener la máxima presión unitaria en la arista de agua arriba.

198. *Cuarta faja.*—La única observación que debe hacerse sobre el estado de esta faja, se refiere á la presión máxima correspondiente á la arista interior de la base, estando vacío el embalse. Según puede verse, la relación $\frac{d'}{B}$ es aún menor que en el estado anterior, y al aplicar la segunda de las fórmulas del trapecio, se obtiene para la presión ρ' el valor $6^{k.}$,1174 por centímetro cuadrado, que excede algo del límite asignado.

Indica esto que en rigor hubiera sido conveniente dar un ligero talud al perfil interior de esta faja, como podía haberse

previsto, al observar los incrementos sucesivos que experimenta ρ' al pasar de una faja á la siguiente; sin embargo, puede admitirse este exceso de presión, dada su pequeñez, sin que sea indispensable rehacer el cálculo. Téngase además en cuenta, que si en ejecución se suaviza con una curva el ángulo entrante formado con el paramento vertical y el inclinado que habrá que dar á la quinta faja, desaparecerá el exceso de presión.

199. *Quinta faja. Cálculo de y.*—Al llegar á este punto de las operaciones, nos encontramos con una nueva incógnita, que es la proyección horizontal del lado interior inclinado de la faja, proyección designada por y.

Según se dijo, al tratar el asunto bajo un punto de vista general, si se considera el embalse primero lleno y después vacío, pueden obtenerse dos ecuaciones de 2.º grado en x y en y, de las que se deducirán los valores de estas incógnitas. Pero se evita la resolución de una ecuación de 4.º grado procediendo como sigue.

Tómase provisionalmente, como talud exterior, un primer valor que llamaremos x', y que puede fijarse con alguna aproximación, observando, al efecto, la ley de crecimiento de estos taludes. Pero más sencillo será asignar á x' el mismo valor obtenido para x en el cálculo de la faja anterior, siendo esto lo que hemos hecho. Con este dato conocido y suponiendo vacío el embalse, se establecerán los cálculos para hallar el talud interior y, lo que exigirá la resolución de una ecuación de 2.º grado. Partiendo después de este último talud como dato, tomando además el exterior como incógnita, y considerando lleno el embalse, llegaremos á otra nueva ecuación de 2.º grado, de la que se deducirá el verdadero valor de x. Según veremos, este método es suficientemente exacto.

En el estado formado con motivo del cálculo del talud y, relativo á la quinta faja, aparecen los pesos de la fábrica compuestos: 1.º del referente al rectángulo de $15^m,04$ de ancho (fig. 87); 2.º del triángulo exterior, cuya base hemos tomado provisionalmente igual á los $4^m,14$ que tiene el talud

análogo de la 4.ª faja; y 3.º del triángulo interior de base y.

Todos los momentos se toman con respecto á la arista A de la base, y los superiores deben formarse multiplicando los pesos de las tres primeras fajas por su brazo de palanca $4^m,76 + y$. La cantidad numérica $4^m,76$ representa la distancia del centro de gravedad, relativo al conjunto de estos pesos superiores, al paramento vertical de la cuarta faja, distancia que figura en el estado de dicha faja con la designación d'.

Es fácil prever que la presión en la arista interior tiende á exceder del límite asignado de 60.000 kil. por metro cuadrado, y también que por causa del talud que con este motivo se da al paramento, se aleja esta arista de la resultante, colocándola entonces á una distancia superior al tercio de la base. Será, pues, preciso aplicar, para obtener dicha presión, la primera de las dos fórmulas del trapecio, que puede ponerse bajo la forma

$$2P_1B_1 - 3P_1d_1 = \frac{\rho_1}{2} B_1^2.$$

Debe advertirse que en el estado que se está examinando, así como en todos los demás relativos al cálculo de y, se pone el índice $_1$ á las letras representativas de los diversos elementos, por no ser sus valores los verdaderos, en tanto no se rectifique el talud exterior x, tomado provisionalmente igual al de la faja de encima, y por lo tanto, un poco escaso.

En la ecuación anterior se harán las siguientes sustituciones: 1.º se pondrá por P_1 el valor hallado en función de y; 2.º lo mismo debe hacerse con B_1, que es igual á $19^m,28 + y$; 3.º el producto P_1d_1 es equivalente á $\mathcal{M} P_1$, otra función de y también conocida; 4.º por último, se reemplazará ρ por la cantidad 60.000 kil., que constituye el tipo máximo adoptado. Se llega así á la ecuación

$$y^2 + 52\,y = 77,353,$$

de la que se deduce $y = 1^m,44$, para la proyección del talud interior. No queda más que poner este valor de y en las ex-

presiones de P_1, $\mathcal{M} P_1$ y B_1, calcular después la distancia d_1, la relación $\frac{d_1}{B_1}$, y por último, la presión ρ_1, que ha de resultar igual á 60.000 kil., lo cual servirá de comprobación.

200. *Quinta faja. Cálculo de x.*—Es preciso ahora determinar con exactitud el talud exterior x, partiendo del valor 1,44 hallado para el interior y suponiendo lleno el embalse. Los cálculos se disponen de una manera semejante, si bien presentan, para esta faja y las sucesivas, diferencias que se irán indicando.

La inclinación del paramento interior FA (fig. 88), da lugar á una carga de agua cuya sección es un trapecio, que tiene por bases paralelas las verticales FM y AN prolongadas hasta la coronación. Para facilitar siempre la formación de los momentos, se subdivide el trapecio en dos triángulos, MNF y FNA, con una misma altura de $1^m,44$ y bases de 24 y 30 metros respectivamente, para la quinta faja. Estos triángulos figuran en la suma de los pesos, así como en la de momentos; al examinar la figura, se ve que sus brazos de palanca, referidos á la arista D, son: para el primero

$$x + 15^m,04 + \frac{1,44}{3} = 15^m,52 + x,$$

y para el segundo

$$x + 15^m,04 + \frac{2}{3} \times 1^m,44 = 16^m,00 + x.$$

Lo mismo que antes, se componen los momentos superiores del valor de $\mathcal{M}$ P calculado en la cuarta faja y del de P de la misma multiplicado por x. Los cálculos de x, d, B y ρ, se hacen según queda explicado.

Para hallar d' y ρ', que son relativos al caso de estar vacío el embalse, es necesario determinar los pesos y los momentos de la fábrica sola, es decir, sin carga de agua. En el estado aparecen cada uno de los pesos parciales, así como los momen-

tos que se obtienen fácilmente. Obsérvese que la suma de pesos de vacío, designada por P', es ligeramente superior á la obtenida para P_1 en el cálculo de la quinta faja relativo á y. La diferencia procede, como es natural, de la pequeña rectificación del talud x.

Los pesos superiores tienen por brazo de palanca, además del valor $d = 4^m,76$, hallado en la cuarta faja, el de $y = 1,44$, obtenido para la quinta, dando un total de $6^m,20$.

Adviértase, por último, que la máxima presión ρ' en la arista interior, obtenida en el estado que se está examinando, difiere poco del valor de ρ_1 hallado para el mismo punto en el estado que le precede, es decir, antes de rectificar el talud exterior provisional. Demuestra esto que el método empleado para hallar las dos incógnitas x, y, es perfectamente aceptable.

201. *Sexta faja y siguientes.*—Todas las demás fajas exigen cada una, como la quinta, dos estados, uno para el cálculo de y y otro para el de x. Se disponen ambos de la misma manera, teniendo únicamente que hacer sobre ellas las siguientes observaciones.

Al formar, en el primero de estos dos estados, la suma de pesos, debe ponerse para los señalados con la designación de superiores, el valor P' de los *pesos sin agua* calculado en el estado que le precede. Asimismo, para los momentos superiores, se tomará la cantidad numérica correspondiente á $\mathcal{M}\,P'$, más el producto por y de la relativa á P'.

Cuando se trata del cálculo de x, se toma para pesos superiores el valor P del mismo estado anterior al de y, (es decir, con la carga de agua), y para momentos superiores el de $\mathcal{M}\,P$, al que se agrega el producto $P \times x$.

202. Creemos suficientes las explicaciones que anteceden sobre el cálculo de una sección de presa. Observaremos únicamente que al disponer cada uno de los estados correspondientes y para facilitar la formación de los pesos y sus momentos, conviene tener á la vista un croquis de la faja que se considere, acotando en él las dimensiones numéricas conocidas y la letra que designa la proyección del talud desconocido.

Aunque los cálculos que preceden, así como las explicaciones dadas con motivo de su disposición, puedan parecer algo minuciosos para un estudio, hemos creído conveniente presentarlos con detalle, para evitar tanteos en la práctica.

203. Examinaremos ahora la resistencia que ofrece el muro, cuya sección acaba de calcularse, á los dos movimientos de resbalamiento y de giro.

Los mismos cálculos proporcionan los elementos necesarios para hacer este examen, en cada una de las secciones que subdividen al macizo; así es que tendremos el coeficiente de estabilidad de giro, dividiendo el momento de los pesos $\mathcal{M}$ P por el momento del empuje horizontal $\mathcal{M}$ Q, y se hallará la relación f del empuje á la presión, dividiendo dicho empuje por P. En el siguiente cuadro se indican los resultados obtenidos.

NÚMERO 37

CUADRO *de relaciones entre el empuje y la carga, y coeficientes de estabilidad de giro, en la presa de embalse calculada.*

Secciones y su altura desde la coronación.	Relación del empuje á la carga. f	Coeficiente de estabilidad de giro. c	Secciones y su altura desde la coronación.	Relación del empuje á la carga. f	Coeficiente de estabilidad de giro. c
1.ª 6m,00	0,27	4,58	6.ª 36m,00	0,58	2,68
2.ª 12,00	0,49	2,21	7.ª 42,00	0,53	3,25
3.ª 18,00	0,61	1,99	8.ª 48,00	0,47	3,94
4.ª 24,00	0,66	1,95	9.ª 54,00	0,43	4,77
5.ª 30,00	0,63	2,25			

Este cuadro demuestra, que la resistencia del muro á los dos movimientos de deslizamiento y de giro es considerable en la

parte superior, por efecto de la gran latitud que se da á la coronación; decrece á medida que se desciende, hasta ofrecer un mínimum en el punto donde empieza el talud interior, es decir, en la base de la cuarta faja. A partir de este punto, la resistencia á ambos movimientos aumenta cada vez más.

No es de temer en esta clase de macizos el movimiento de resbalamiento, puesto que el mayor valor 0,66, obtenido para f, es inferior al de 0,76, adoptado como tipo por algunos constructores y aun más á la unidad, que sin el menor inconveniente puede admitirse, tratándose de una sección ficticia hecha en una fábrica que debe siempre ejecutarse con mucha trabazón y sin planos de junta, es decir, sin proceder por enrases á nivel. En las presas de embalse no hay que preocuparse con la posibilidad del deslizamiento en la base, pues estos muros solo deben fundarse sobre roca firme, en la que se arraiga la mampostería, estableciendo en ella artificialmente cajas y asperezas, cuando las desigualdades naturales de la roca no son suficientes y la superficie de la misma se presenta muy lisa.

204. El valor mínimo del coeficiente de estabilidad de giro difiere poco de 2, á cuya cifra no llega; pero aunque fuese menor, sin dificultad podría admitirse tratándose de una construcción en la que no deben temerse aumentos accidentales de empuje.

El mismo coeficiente aumenta considerablemente con la altura del muro, y esto justifica lo que dijimos sobre la necesidad de estudiar la estabilidad de los macizos bajo el punto de vista de cada uno de los tres movimientos que pueden imprimirle las fuerzas á que están sometidos. Al tratar de los muros de sostenimiento se vió que, cuando la altura es considerable, la máxima presión unitaria en la base llega á sobrepujar al límite adoptado en la práctica; es preciso entonces, ó bien recrecer el espesor del muro, lo que dará lugar á un coeficiente de estabilidad mayor que 2, ó adoptar otras disposiciones más económicas.

205. Cuando solo se trate de verificar la resistencia de una sección de presa cuyas dimensiones han sido ya fijadas, se dispondrán los cálculos de un modo análogo, con la diferencia

de ser éstos más sencillos, por no existir las incógnitas x, y. Habrá que determinar siempre para cada grupo de fajas los valores de P, Q, $\mathcal{M}$ P, $\Sigma\mathcal{M}$, y de éstos se deducirán d, d', ρ y ρ'.

Si la sección de presa forma parte de un proyecto que deba someterse á la aprobación superior, será conveniente dibujarla en escala bastante grande, de $\frac{1}{200}$, por ejemplo, y trazar en ella, no solo las dos curvas de presión, sino también, y para cada grupo de fajas, á partir de arriba, el paralelógramo de las dos fuerzas P y Q acotadas, dando lugar á la resultante que cruza á la respectiva base en el punto de paso de la curva.

206. El perfil de igual resistencia, tal como lo hemos obtenido para una presa de embalse, puede también aplicarse á un muro destinado á resistir al empuje de las tierras. El procedimiento es análogo; se dividirá el macizo en fajas horizontales, y adoptando para el paramento interior un perfil rectilíneo; si, por ejemplo, lo disponemos verticalmente, habrá que calcular sucesivamente el talud exterior de cada una de estas fajas. Pero debe observarse, que partiendo del ancho de coronación estrictamente necesario para las losas de remate, será preciso estudiar las dimensiones de las fajas superiores bajo el punto de vista del movimiento de giro, por ser el que allí ofrezca mayor interés, y se obtendrá la proyección x del talud de cada faja estableciendo la ecuación

$$\mathcal{M}\,\mathrm{P} = c \times \mathcal{M}\,\mathrm{Q},$$

en la que c designa el coeficiente de estabilidad adoptado.

Se formarán estados semejantes á los anteriores, en los cuales aparecerán en función de x los pesos y los momentos de toda la parte de macizo sobrepuesta á la base de cada faja. Habrá que calcular igualmente los momentos de empuje, así como los valores de d y de la presión ρ.

Esta presión crece á medida que se considera un punto más bajo; pero será fácil prever el momento en que ha de sobrepu-

jar al límite máximo admitido. Entonces se obtendrá la ecuación en x que da el talud, valiéndose de una de las dos fórmulas del trapecio. Será la primera ó la segunda, según que d sea mayor ó menor que el tercio de la base.

Las anteriores indicaciones hacen ver con claridad, que un mismo macizo de fábrica puede exigir la aplicación de los dos métodos de cálculo que derivan de los dos movimientos de giro y de aplastamiento, no pudiendo ninguno de estos dos métodos, por sí solos, constituir un sistema general aplicable á todos los casos que ocurren en el estudio de estabilidad de las construcciones.

207. La sección de presa determinada supone que su longitud es de un metro; dicha sección es, pues, aplicable á una longitud cualquiera, y la obra resistirá siempre por su propio peso á la acción de los esfuerzos á que se halla sometida. Pero si este muro está situado en un valle estrecho, se concibe que el empuje del líquido se trasmitirá hasta cierto punto á las laderas en que estriba, suponiéndolas formadas de un terreno muy resistente, y esto disminuirá la presión en la parte inferior del macizo, permitiendo reducir en algún tanto su espesor.

Como las dos laderas opuestas se van acercando á medida que se considera un nivel más bajo, si el estrechamiento del valle es suficiente, sucederá que á partir de cierta altura, el grueso del muro, calculado según el método descrito, y hasta la parte inferior, será mayor que su longitud medida transversalmente á la corriente.

En la memoria citada de M. Delocre, se adopta como principio que, á partir del punto en que el espesor de la presa es igual al ancho del valle, el empuje del agua se trasmite lateralmente á las laderas, aligerando la parte inferior de la obra.

Demuéstrase este principio por las siguientes consideraciones: Sea ABCD (fig. 89), la sección horizontal de una presa empotrada en el valle, y cuyo espesor AB es igual á su longitud BC; trazando las diagonales AC, DB, y suprimiendo por un momento los triángulos AOD y BOC, los macizos restantes recibirán el empuje del agua normalmente á las caras OD, OA,

y lo trasmitirán por completo á la roca, con la que se hallan en contacto. Repónganse ahora en su sitio los dos prismas triangulares anteriormente suprimidos, y que son necesarios para sostener la parte superior de la obra; el prisma AOD, obrando como cuña, trasmite igualmente á los lados OA y OD el empuje del líquido que recibe normalmente sobre su cara AD.

De aquí resulta que bajo el solo punto de vista del movimiento de giro, no se necesitaría dar á la presa un espesor que excediera del ancho valle; pero como las acciones verticales procedentes de los pesos del macizo y del agua sobre el paramento posterior inclinado actúan siempre, aumentando además de intensidad con la altura, será preciso evitar que la mampostería se encuentre sometida á una presión demasiado considerable, y esto se conseguirá dando á la parte inferior del muro cierto talud exterior, pero menos tendido que el de la faja situada encima.

208. Según esto, la sección vertical de un gran muro de contención podría constar de cuatro partes distintas (fig. 90). La primera y superior CBEF, de forma rectangular, la segunda EFGH, con paramento interior vertical y el exterior inclinado; la tercera GHJI, presentando talud por ambos lados, y por fin la última IJDA, análoga á la anterior, pero con el paramento de agua abajo mucho menos tendido.

Partiendo del principio admitido, determina M. Delocre una sección de presa calculada en la hipótesis de prescindir del empuje horizontal del agua, en todas las fajas situadas por bajo de aquella cuya latitud en sentido de la corriente sea igual á la separación de las dos laderas en que estriba. Puede determinarse la posición del punto correspondiente al cambio de talud, mediante una construcción gráfica muy sencilla; se reduce á llevar sobre varias horizontales BL, FM, HN ....., y á partir del paramento interior de la sección, longitudes respectivamente iguales á los anchos del valle en aquellas distintas alturas; uniendo las extremidades de dichas longitudes, se obtendrá una curva LMNI, que cortará al paramento exterior en el punto buscado.

Si quisiéramos aplicar también el mismo principio á nuestro perfil de presa, sería necesario modificar los cálculos relativos á las fajas de mayor latitud que el ancho del valle, haciendo en ellos caso omiso del valor relativo al empuje del líquido sobre dichas fajas. Salvo esta rectificación, las demás operaciones serían las mismas.

El nuevo perfil exterior obtenido por este medio, ofrecería en la parte inferior un cambio brusco de talud que, en ejecución, había de producir mál efecto. Que sepamos, semejante variación no ha sido adoptada en ninguna obra de esta naturaleza; ni aun en la presa de Furens, calculada por el mismo Delocre. Además, escasa es la importancia de la economía que en el volumen de fábrica puede conseguirse con el perfil modificado, atendiendo á la pequeña longitud del muro en la parte baja, debida á la gran aproximación de las laderas en los valles estrechos.

Por más que sea indudable la influencia ejercida por el estrechamiento sobre la disminución de la presión á que se halla sometida la fábrica, creemos que lo más que conviene hacer, bajo este punto de vista, se reduce á suprimir el aumento gradual de inclinación en el paramento exterior, trazándolo con un mismo talud rectilíneo, que parta del punto en donde se verifica la igualdad entre el espesor del muro y el ancho del valle, hasta los cimientos, siendo dicha inclinación la que asigna el cálculo á la faja sobrepuesta al citado punto.

209. *Forma del perfil.*—Admitiendo la forma general que resulta para la sección de un muro de igual resistencia, pueden perfilarse los paramentos, especialmente el exterior, de diferentes maneras; ya sea adoptando un polígono de grandes lados, ya una curva continua, y por último, disponiéndolo con retallos de poca altura.

Esta última disposición ha sido propuesta por M. Zazilly, con objeto de evitar los inconvenientes que atribuye á los otros dos perfiles, y son:

1.° Los ángulos agudos que resultan del encuentro de las secciones horizontales con los paramentos colocan á estos últi-

mos en malas condiciones para resistir á los esfuerzos á que se hallan sometidos.

2.º La inclinación muy tendida del paramento exterior ha de favorecer, sobre la mampostería más ó menos húmeda, el desarrollo de la vegetación de plantas parásitas, cuyo efecto es siempre perjudicial.

3.º La ejecución de un paramento con perfil poligonal, á más de producir siempre mal aspecto, dará lugar á algunas dificultades prácticas.

No estamos del todo conformes con M. Zazilly para considerar preferible el perfil escalonado, encontrando nuestro parecer, que es contrario, confirmado por la mayor parte de los constructores de las grandes presas modernas, en las que no se observan los escalones.

Es fácil, en primer lugar, evitar el inconveniente de los ángulos agudos aparejando los mampuestos del paramento normalmente á su línea de máxima pendiente, con lo que quedan éstos situados en mejores condiciones de resistencia.

Con dificultad admitiremos que un perfil poligonal presente peor aspecto que los retallos; pueden además disimularse los ángulos entrantes de este perfil, sustituyéndolo con una curva continua, ó más sencillamente aumentando el número de lados del polígono. En cuanto á las dificultades de ejecución las hallamos, por el contrario, mayores, y sobre todo más costosas, tratándose de un paramento con escalones, en los que hay que esmerar la mano de obra, á fin de evitar el mal efecto que producirían las aristas salientes en cuanto dejaran de ofrecer la debida regularidad. El coste se aumenta también con el empleo de la piedra labrada que exigen los peldaños. Por fin las aristas están más expuestas á una pronta destrucción.

La vegetación de las plantas parásitas es mucho menos temible en un paramento inclinado y bien rejuntado que sobre las caras horizontales de los retallos, por más que proponga M. Zazilly cubrirlas con una capa de asfalto.

Se atribuye al sistema escalonado la ventaja de facilitar el acceso á las diferentes partes del paramento, para practicar en

él las reparaciones que puedan ser necesarias. Los constructores de la presa de Furens han dispuesto, con este objeto, en el paramento de agua abajo, sillares salientes que permiten establecer andamios; en el paramento de arriba se sustituyen los sillares con argollas de hierro. En la presa del Villar hemos dejado ambos paramentos completamente lisos y sin el menor cuerpo saliente. Las reparaciones, que nunca pueden ser importantes, se harán siempre fácilmente por medio de ligeros andamios volantes, suspendidos de la parte superior del muro. Así hemos procedido varias veces durante la ejecución de los trabajos, para rehacer algunos rejuntados desechos por las heladas.

210. *Forma de la planta.*—La mayor parte de las grandes presas modernas se trazan en planta con arcos de círculo, cuyo radio varía entre 100 y 300 metros. La forma curva del muro ofrece ventajas sobre la disposición en línea recta. Se presta á cierta trasmisión del empuje á las laderas, aligerando con esto el trabajo de compresión de la fábrica; sin embargo, en los cálculos no debe tenerse en cuenta esta ventaja, que por otra parte es muy dificil, por no decir imposible, de apreciar. Con la forma circular se encuentra la construcción en mejores condiciones para resistir á la flexión, de que es también susceptible, hasta cierto grado, todo macizo de mampostería.

Esta flexión puede realmente verificarse en un muro rectilíneo á consecuencia de diferencias en el asiento de la fábrica y dar lugar á agrietamientos, más ó menos importantes, susceptibles de comprometer la solidez de la obra. Deben, pues, evitarse las presas en línea recta.

Varias de nuestras antiguas presas de embalse afectan, en proyección horizontal, una forma poligonal que no debe aconsejarse.

El aumento de mano de obra á que puede dar lugar la curvatura de los paramentos no merece tenerse en consideración por su escasa importancia. La ejecución de estos paramentos se efectúa sin dificultad ninguna, procurando comprobar de cuando en cuando la exactitud de la curvatura. Puede para esto emplearse el siguiente procedimiento.

Supongamos que el paramento se encuentra enrasado de nivel; por la altura á que está situada la línea de enrase fácil será deducir el radio del arco de círculo que le corresponde, y podrá calcularse el desarrollo de un arco de 2 grados, por ejemplo. Sobre el borde de la fábrica, y á partir de un punto central A (fig. 91), se llevarán á derecha é izquierda distancias AB, BC, etc., AB′, B′C′, etc., iguales todas á este desarrollo. Si en A se coloca un goniómetro cualquiera, cuya línea 0 — 180° del círculo esté orientada según la tangente TT′, haciendo girar el anteojo de grado en grado, los rayos visuales AB, AC, ... AB′, AC′, etc., deberán coincidir con las señales de división del borde de la fábrica. Para poder orientar el instrumento, es preciso tener señalado en el terreno, de un modo muy visible, un jalón que corresponda al eje O de las superficies de revolución que constituyen los paramentos de la presa.

Cuando los rayos visuales del anteojo no corresponden exactamente con las divisiones B, C, ... B′, C′, ... señaladas en el borde del paramento, se toma nota de las diferencias para corregirlas al ejecutar la fábrica que ha de situarse encima. Es, sobre todo en las dos extremidades del arco, en donde conviene comprobar la curvatura, pues aumentando la longitud á medida que la construcción se va elevando, los mamposteros no tienen ya en dichas extremidades la fábrica de abajo para servirles de guía.

Se facilita mucho la comprobación empleando en los paramentos de la obra piedra labrada ó simplemente desbastada á escuadra. Con dicho material se puede proceder por hiladas, cuyos lechos se disponen normalmente á la superficie, y deben siempre ligarse bien con el resto de la fábrica.

211. *Sección del vertedero de superficie.*—Con objeto de asegurar la estabilidad del muro y su buena conservación, es preciso que la sección del vertedero ó de los vertederos de superficie permitan el paso del excedente de las mayores crecidas del río, una vez lleno el embalse, sin que nunca tenga que verter el agua por la coronación. Se determina la importancia

de las crecidas, como es sabido, por medio de observaciones meteorológicas, valiéndose de algunos datos que puede proporcionar la localidad y estudiando las vertientes del valle, así como el origen de las aguas que á él acuden.

Si conociendo la mayor cantidad de agua conducida por la corriente en un segundo, en el transcurso de una de las crecidas más extraordinarias, asignamos al vertedero la sección necesaria para dar paso á esta cantidad, podremos estar seguros que nunca el agua verterá por la coronación del muro, y en muchos casos el nivel del líquido distará bastante de llegar á dicha coronación, aunque el río lleve el máximo antedicho y á pesar de encontrar la crecida, en su origen, lleno el embalse. Para convencerse de esto, es necesario tener en cuenta que el máximo caudal por segundo no constituye una cantidad constante, pues solo se verifica durante un tiempo generalmente corto y fuera del cual es menor; debe considerarse también que la duración de una crecida, así como el volumen total de agua que la compone, tienen un límite dependiente de la intensidad y circunstancias de los fenómenos que los han producido. Por otra parte, aun suponiendo que al iniciarse la crecida el nivel del embalse sea el de la solera del vertedero, no podrá el agua verter por la coronación sin haber depositado antes en el vaso el volumen de líquido que contenga la faja superior, de una altura igual á la que presenta la sección del vertedero, ó sea desde su solera hasta dicha coronación, volumen por lo regular de bastante importancia.

212. Las indicaciones que preceden se relacionan con una cuestión debatida por varios ingenieros, al tratar de las inundaciones producidas por una crecida; cuestión cuyo objeto consiste en determinar la influencia ejercida por una presa de embalse sobre el régimen de la crecida, ó más especialmente, la disminución que la existencia del muro produce agua abajo en el máximo caudal por segundo del río, cuando discurriera sin el obstáculo que motiva la retención del líquido.

Diremos algunas palabras sobre este interesante asunto.

Supóngase que durante el transcurso de una misma crecida

y en varios instantes, se han hecho cierto número de observaciones que den á conocer el volumen de agua de la corriente, por unidad de tiempo en cada uno de estos instantes; si sobre una horizontal tomada como eje de las abscisas, y á partir de un punto O (fig. 92), llevamos 01, 02, 03 ..... etc., respectivamente proporcionales á los intervalos de tiempo que median entre el principio de la crecida y cada una de las observaciones; si además por los puntos de división 1, 2, 3....., se levantan las perpendiculares 1A, 2B, 3C ....., que representen, también en longitud, cada uno de los volúmenes unitarios deducidos de las mismas observaciones, la curva que une los puntos O, A, B, C ..... indicará con claridad la marcha seguida por la crecida, y el área comprendida entre la curva y el eje de las abscisas dará á conocer el volumen total de agua conducido por la corriente. La línea OABC ..... recibe el nombre de *curva de avenidas*.

Se supone que al iniciarse la crecida el embalse está lleno hasta el nivel de la solera del vertedero; éste empieza, pues, á funcionar en este instante y da lugar á una salida de agua, que va en aumento á medida que crece el nivel de la cara de aguas, y por lo tanto, el espesor de la lámina que vierte. Si sobre las mismas ordenadas llevamos las longitudes 1A', 2B', 3C' ..... proporcionales, en la misma escala, á los volúmenes que salen del embalse en la unidad de tiempo y en los instantes de las primeras observaciones, tendremos determinada la curva OA'B'C' ..... llamada *de evacuación*, cuyas ordenadas van creciendo hasta cierto punto E, en donde se cruza con la curva de avenidas. Obsérvase que las superficies comprendidas entre cada una de las dos curvas y el eje de abscisas, representan, por una parte el volumen de agua que ha entrado en el embalse, y por otra, el que ha salido en el mismo tiempo; por lo tanto, el área OABCDED'C'B'A' indicará el incremento de volumen de líquido que ha tenido el vaso. Este incremento gradual cesa en el punto E; la lámina que vierte habrá tomado el mayor espesor de que es susceptible, y como consecuencia, la evacuación de líquido estará en su máximo. Esto de-

muestra que en el punto E de encuentro, la tangente á la curva de evacuación es horizontal.

A partir de este punto, las ordenadas de la curva últimamente mencionada superan á las de la otra, ó lo que es lo mismo, saldrá más agua de la que entra, y ambas curvas se volverán á encontrar en un punto J; pero debería existir igualdad entre las dos áreas OABCDED'C'B'A' y EFGHIJI'H'G'F', puesto que la primera representa el exceso de la entrada de agua sobre la salida, antes del máximo de evacuación, y la segunda el exceso de la salida sobre la entrada después de este máximo; es evidente que las dos diferencias han de ser iguales para reponerse el embalse á su estado primitivo.

Según lo que se acaba de exponer, el efecto producido por la presa consiste en disminuir la importancia de la crecida agua abajo del muro, en lo relativo al volumen máximo por unidad de tiempo, volumen representado por la ordenada E5 , mientras que no existiendo la obra, su valor hubiera sido el que señala D4. El máximo de evacuación, queda también retrasado con respecto al de avenida. Este resultado demuestra la posibilidad de reducir la sección del aliviadero de superficie sobre lo que exigiría para dar paso al máximo absoluto de la avenida. Sin embargo, en la previsión de ser incompletos ó erróneos los aforos, será prudente no utilizar esta ventaja.

213. *Estudio de algunas secciones de presa.*—Con objeto de podernos hacer cargo de las diferencias que ofrece la sección transversal de un gran muro de embalse, cuando se varía la latitud superior ó las condiciones de resistencia, hemos calculado los cuatro cuadros siguientes, que contienen todos los datos necesarios para definir por completo la sección y sus condiciones de resistencia.

Se componen estos cuadros de nueve columnas que, según puede verse por sus respectivos encabezamientos, contienen las alturas, taludes, anchos de base, distancias de la resultante á los puntos de giro, máximas presiones, tanto exteriores como interiores, y por último, los volúmenes por metro lineal de muro.

NÚMERO 38

CUADRO *de los datos relativos á una sección de presa calculada para un ancho de coronación de* 5 *metros, una distancia mínima* $d = \frac{B}{3}$ *, y una presión máxima de* 6 *kilogramos.*

Alturas.	TALUDES		Anchos.	DISTANCIAS		PRESIÓN MÁXIMA		Volumen.
—	Exterior.	Interior.	—	Exterior.	Interior.	Exterior.	Interior.	—
H	x	y	B	d	d'	ρ	ρ'	V
m.	m.							
6,00	0,00	0	5,00	1,96	2,50	21.753	13.200	30,00
12,00	2,17	0	7,17	2,39	2,82	40.815	33.468	66,51
18,00	3,73	0	10,90	3,63	3,61	48.731	49.046	120,72
24,00	4,14	0	15,04	5,01	4,76	58.083	61.174	198,54
30,00	4,78	1,44	21,26	7,85	7,49	60.086	60.001	307,47
36,00	5,36	2,12	28,74	11,75	10,92	60.067	60.227	457,48
42,00	5,76	3,05	37,55	16,59	15,23	60.100	60.223	656,17
48,00	6,23	4,03	47,81	22,41	20,41	60.043	60.372	912,01
54,00	6,76	5,16	59,73	29,27	26,59	60.148	60.500	1234,48

NÚMERO 39

CUADRO *de los datos relativos á una sección de presa calculada para un ancho de coronación de 2 metros, una distancia mínima* $d = \frac{B}{3}$, *y una presión máxima de 6 kilogramos.*

Alturas. — H	TALUDES		Anchos. — B	DISTANCIAS		PRESIÓN MÁXIMA		Volumen. — V
	Exterior. x	Interior. y		Exterior. d	Interior. d'	Exterior. ρ	Interior. ρ'	
m.	m.	m.	m.	m.	m.	K.	K.	m.
6,00	1,62	0	3,62	1,21	1,45	20,492	16.396	16,86
12,00	3,90	0	7,52	2,51	2,41	29.419	30.600	50,28
18,00	4,19	0	11,74	3,91	3,74	40.500	42.000	100,06
24,00	4,22	0	15,93	5,30	5,15	53.403	54.414	191,07
30,00	4,52	0,84	21,29	7,61	7,38	60.041	60.062	302,63
36,00	5,38	2,07	28,74	11,56	10,82	60.071	60.382	452,82
42,00	5,67	3,04	37,45	16,48	15,06	60.015	60.191	651,39

NÚMERO 40

CUADRO *de los datos relativos á una sección de presa calculada para un ancho de coronación de 5 metros, una distancia mínima* $d = \frac{B}{3}$, *y una presión máxima de 7 kilogramos.*

Alturas. — H	TALUDES Exterior. x	TALUDES Interior. y	Anchos. — B	DISTANCIAS Exterior. d	DISTANCIAS Interior. d'	PRESIONES MÁXIMAS Exterior. ρ	PRESIONES MÁXIMAS Interior. ρ'	Volumen. — V
m.	m.	m	m.	m.	m.	K.	K.	m^3
6,00	0	0	5,00	1,96	2,50	21.753	13.200	30,00
12,00	2,17	0	7,17	2,39	2,82	40.815	33.468	66,55
18,00	3,73	0	10,90	3,63	3,61	48.731	49.046	120,51
24,00	3,97	0	14,87	5,01	4,76	58.083	61.174	198,54
30,00	4,14	0,53	19,54	6,52	6,54	69.562	68.067	304,28
36,00	5,05	1,30	25,89	9,61	9,15	70.071	70.132	440,57
42,00	5,33	1,88	33,10	13,20	12,30	70.715	70.135	617,54
48,00	5,77	2,85	41,72	17,97	16,50	70.031	70.390	842,00
54,00	6,13	3,75	51,60	23,57	21,00	70.087	70.669	1121,96

NÚMERO 41

CUADRO *de los datos relativos á una sección de presa calculada para un ancho de coronación de* 5 *metros, una distancia* $d = \frac{B}{3}$, *y un paramento interior completamente vertical.*

Alturas.	TALUDES		Anchos.	DISTANCIAS		PRESIONES MÁXIMAS		Volúmenes.
—	Exterior.	Interior.	—	Exterior.	Interior.	Exterior.	Interior.	—
H	x	y	B	d	d'	ρ	ρ'	V
m.	m.	m.	m.	m.	m.	K.	K.	m^3
6,00	0	0	5,00	1,96	2,50	21.753	13.200	30,00
12,00	2,17	0	7,17	2,39	2,82	40.815	33.468	66,51
18,00	3,73	0	10,90	3,63	3,61	48.731	49.046	122,72
24,00	4,14	0	15,04	5,01	4,76	58.083	61.174	200,54
30,00	4,25	0	19,29	6,43	6,08	68.778	72.737	303,53
36,00	4,25	0	23,54	7,84	7,48	80.378	84.317	432,02
42,00	4,21	0	27,75	9,25	8,89	92.580	96.329	585,89
48,00	4,18	0	31,93	10,64	10,31	103.405	106.748	764,93
54,00	4,16	0	36,09	12,02	11,79	117.892	120.908	969,00

214. El primero de los cuatro cuadros mencionados constituye un resumen de los resultados obtenidos con los cálculos que detalladamente hemos presentado. La figura 93 representa la sección correspondiente.

El cuadro que sigue (núm. 39), parte de los mismos datos, exceptuando la latitud de coronación, que solo es de 2 metros (figura 94).

Al comparar este cuadro con el que le precede, se observa que solo para pequeñas alturas de muro puede haber alguna ventaja en reducir la latitud de coronación. La diferencia que presentan los volúmenes son: $13^{m^3},14$ para 6 metros de altura, $20^{m^3},66$ para 18 metros; luego disminuye hasta reducirse á 5 metros cúbicos para las alturas de 30, 36 y 42 metros.

Puede también notarse, que para estas tres últimas alturas los anchos son casi los mismos, de manera que en la parte inferior los perfiles han de confundirse con corta diferencia.

No hay, pues, gran interés, bajo el punto de vista de la economía de mampostería, en reducir el ancho de la coronación, cuando la altura de la presa es de alguna importancia.

215. Para el cálculo del cuadro núm. 40 hemos adoptado la cantidad de 7 kilogramos como límite de presión máxima por centímetro cuadrado. La distancia de la resultante á la arista compone, por lo menos, el tercio de la base, y la latitud de coronación es de 5 metros, como en el primer ejemplo.

Las cuatro primeras fajas de la sección (fig. 95), son idénticas á las del primer caso, es decir, que tienen los mismos taludes exteriores, igual ancho é igual volumen. Así debe ser, puesto que partimos de la misma latitud de coronación, imponiendo también la condición de hacer pasar la resultante por el tercio de la base.

Se advierte que, á partir de la quinta faja, los volúmenes son inferiores á los análogos del cuadro núm. 38, acentuándose más la diferencia á medida que aumenta la altura. La economía de volumen es de 9 por 100 en la faja novena.

216. Por último, hemos calculado otra nueva sección, fijando la condición de pasar constantemente la resultante por el

tercio de la base, en toda la altura del muro y hallándose el embalse con agua; el paramento interior se deja completamente vertical hasta la parte inferior del macizo (cuadro número 41).

Las cuatro primeras fajas de este cuarto cuadro son iguales á las análogas del primero y del tercero; pero las demás indican una economía de volumen, tanto más importante, cuanto mayor es la altura del muro; pero esta economía se consigue á cambio de una máxima presión más considerable, que llega á sobrepujar los tipos racionalmente admisibles en la práctica. Sin embargo, no deja de ofrecer este cuadro cierto interés, como estudio, pues por él puede juzgarse, dada la presión máxima impuesta en las condiciones de un proyecto de presa, hasta qué altura podrá conservarse la verticalidad del paramento interior y la propiedad de pasar la resultante por el tercio de la base.

217. *Perfil aproximado.*—Al escribir este tratado sobre la estabilidad de las construcciones de mampostería, nos hemos propuesto, como objeto principal, establecer fórmulas y procedimientos sencillos que permitan fijar rápidamente las dimensiones de una obra, sin tener que acudir á muchos cálculos. Así hemos procedido para los macizos estudiados en los anteriores capítulos, y trataremos ahora de conseguir un resultado semejante con respecto á las grandes presas de embalse.

Se concibe que para llegar á este resultado, es necesario sacrificar en algún tanto la exactitud. Por lo demás, cuando se trata de hacer el estudio definitivo de una obra importante, no es oportuno admitir ligeras aproximaciones, puesto que siempre deberán someterse al examen de la administración superior los cálculos que justifican las disposiciones adoptadas y demuestran su mejor conveniencia bajo todos conceptos.

Pero es muy útil en un anteproyecto poder hacer con brevedad el trazado de la sección del muro, á fin de hacerse cargo de las disposiciones de la obra, evaluar su volumen y determinar su coste probable.

Al objeto de satisfacer esta necesidad, proponemos la

adopción de la sección de presa indicada en la figura 96, cuyo trazado no puede ser más sencillo.

Se conservará la verticalidad del paramento interior hasta una altura AB igual á 24 metros; en B se toma un ancho BC de 16 metros, es decir, de $\frac{2}{3} \times$ AB; la línea que une el punto C con el punto A fija el paramento exterior del cuerpo intermedio. Sobre la horizontal de A se llevará el ancho AD de coronación que se quiera, de 3, de 4 ó de 5 metros; la vertical DE forma el paramento del cuerpo superior. Por último, se determinará el tercer cuerpo trazando por B el paramento interior BI con talud de $\frac{1}{3}$, y por C la recta CL, para el exterior, con inclinación de $\frac{3}{4}$, ó sea de 3 de base por 4 de altura.

La inclinación de $\frac{2}{3}$ dada al paramento exterior del cuerpo intermedio se relaciona con el siguiente problema.

Consideremos un macizo de fábrica ABC, cuya sección es un triángulo rectángulo, sometido á una carga de agua sobre la cara vertical AB; propongámonos hallar la relación e que debe existir entre el ancho de la base CB y la altura AB, para que la resultante final pase por el tercio de esta base.

La distancia á la arista C, de la intersección sobre la base, de la resultante, se determina dividiendo la suma algebráica de los momentos por los pesos. Debe expresarse después que esta distancia es igual al tercio de la base, lo que se consigue con la siguiente ecuación:

$$\frac{\frac{\delta' e^2 H^3}{3} - \frac{\delta'' H^3}{6}}{\frac{\delta' e H^2}{2}} = \frac{eH}{3};$$

de donde se deduce

$$e = \sqrt{\frac{\delta''}{\delta'}} .$$

Este resultado indica que la relación e es la misma para una altura cualquiera de muro. Haciendo $\delta' = 2.200$ kilogramos para la fábrica y $\delta'' = 1.000$ kil. para el agua, se tiene

$$e = \sqrt{\frac{1.000}{2.200}} = \frac{2}{3} ;$$

es decir, que si damos á un macizo de sección triangular una base igual á los dos tercios de la altura ó del lado vertical que recibe el empuje del agua, la resultante de la acción del líquido y del peso pasará por el tercio de la base, sea cual fuese esta altura.

Para obtener la máxima presión en la base, se aplicará la segunda fórmula del trapecio

$$\rho = \frac{2P}{3d} ;$$

poniendo por P y por d sus valores, resulta

$$\rho = \frac{\delta' e H^2}{eH} = \delta' H.$$

Es, pues, la presión máxima proporcional á la altura y á la densidad de la fábrica.

Haciendo $\delta' = 2.200$, se verá que para no pasar de una presión de 60.000 kilogramos por metro cuadrado, puede llegarse hasta una altura de muro de $27^m,27$.

Obsérvese que con el embalse vacío, la resultante, equivalente al peso del macizo, pasa también por el tercio de la base, del lado interior; así es que la presión es la misma en la arista interior sin agua y en la exterior con carga de líquido.

218. Al tratar de los muros para depósitos de agua, vimos

que un macizo de sección rectangular necesitaba tener también un ancho igual á $\frac{2}{3}$ de la altura, con objeto de satisfacer á la misma condición de pasar la resultante por el tercio de la base. Esta igualdad de relación no debe sorprender, puesto que si la resultante del peso del macizo triangular ABC y del empuje del líquido pasa por el tercio de CB, lo mismo sucederá cuando á dicho macizo se agrega el AKC; éste no altera el primitivo punto de paso por tener también su centro de gravedad en la vertical del tercio de CB.

El trazado que hemos indicado para el cuerpo superior del perfil aproximado, da una sección rectangular ADEF, cuyo ancho es igual á los $\frac{2}{3}$ de su altura. Satisface, pues, á las condiciones necesarias.

Con respecto á las inclinaciones que asignamos al cuerpo inferior, y son de $\frac{1}{3}$ para el lado de agua arriba y $\frac{3}{4}$ para el de agua abajo, advertiremos que resultan algo inferiores á las del perfil calculado para una presión máxima de 6 kilog.; sin embargo, podrán adoptarse por poco que se estreche el valle. Además, puede modificarse ligeramente la sección, según se indica con trazos de punto, que corresponden á las dimensiones exactas del cálculo.

Lo que principalmente nos hemos propuesto, es obtener una sección de presa cuya área no difiera mucho de la relativa á la sección teórica.

En el siguiente cuadro se indican las distancias, presiones y volúmenes correspondientes á la base de cada uno de los tres cuerpos en que se divide la sección aproximada.

NÚMERO 42

CUADRO *de los datos relativos á una sección aproximada de presa.*

Alturas. — H	TALUDES		Anchos. — B	DISTANCIAS		PRESIONES		Volúmenes. — V
	Exterior. x	Interior. y		Exterior. d	Interior. d'	Exteriores ρ	Interiores. ρ'	
m.	m.	m.	m.	m.	m.	K.	K.	m^3
7,50	0	0	5,00	1,64	2,50	33.536	16.500	37,50
24,00	11,00	0	16,00	5,87	5,16	52.160	59.903	210,75
48,00	18,00	8,00	42,00	18,23	17,55	76.095	70.960	960,70

Si se corrige el perfil según se ha dicho, quedarán disminuídas las presiones en la parte inferior del muro.

Atendiendo al gran interés que ofrecen las presas de embalse, vamos á pasar ligeramente en revista algunas de las obras de esta naturaleza construídas en la actualidad, indicando al mismo tiempo sus condiciones de resistencia.

219. *Presa del Furens.*—Esta obra, llamada también presa del *Gouffre d'enfer*, fué construída por los ingenieros MM. Graeff y Montgolfier. Tiene por objeto regularizar las crecidas del río Furens, almacenando las aguas excedentes, lo que permite utilizarlas para el consuno de la población de *Saint-Etienne*, lavado de sus alcantarillas, y también para aumentar el caudal de estiage, mejorándose con esto el servicio de varios establecimientos industriales que alimenta la corriente.

Se da alguna importancia en esta presa á la acción del oleaje y de los témpanos de hielo, por lo que se ha fijado la latitud superior en $5^m,70$, habiéndose además establecido encima un muro de defensa de $3^m,80$ de latitud, al objeto de impedir que el oleaje pueda salvar la obra, así como para dar paso de un lado á otro del valle.

El perfil (fig. 97), indica la forma y las principales dimensiones de la sección vertical.

El muro cuya forma en planta es circular, de 250 metros de radio, embalsa un volumen de agua de 1.600.000 metros cúbicos. Se ha construído en su totalidad de mampostería ordinaria, inclusos los paramentos, no habiéndose hecho uso de la sillería más que para los aristones, plintos, pretiles y para las piedras salientes del paramento de agua abajo.

Presenta la presa una longitud de 100 metros en la parte superior y 15 abajo. El espesor de la obra empieza á ser igual al ancho del valle á los 32 metros contados desde arriba; á pesar de semejante aproximación de las laderas, no se ha tenido en cuenta la posibilidad de reducir el grueso de la parte inferior.

El siguiente cuadro indica, para diversas alturas, las presiones máximas que hemos calculado, partiendo de un peso de 2.200 kilogramos para el metro cúbico de mampostería y en los supuestos de hallarse el embalse lleno y vacío sucesivamente. Igual densidad de mampostería ha sido adoptada en el cálculo de resistencia de las demás presas que luego se examinarán.

NÚMERO 43

CUADRO *de presiones máximas en la presa del Furens.*

Alturas. — H	PRESIONES MÁXIMAS	
	Exteriores. ρ	Interiores. ρ'
m.	K.	K.
12,00	24.000	32.000
26,00	51.000	57.000
36,00	64.000	63.000
50,00	65.000	60.000

En la mencionada memoria de *M. Graeff* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1866), se hallarán todos los detalles relativos á esta

importante obra, y á los accesorios exigidos por el servicio de la misma.

220. *Presa del Ban.*—En el departamento de la *Loire* se ha construído una presa semejante á la anterior sobre el *Ban*, afluente del *Gier*, con objeto de regularizar el servicio de las fábricas establecidas en las orillas de este último río y suministrar agua potable á la población de *Saint-Chamas*.

Esta presa, cuyo perfil (fig. 98) ha sido calculado por M. Montgolfier, tiene una altura de 42 metros, es decir, ocho menos que la presa del Furens. Los espesores se han reducido también, siendo el superior de 5 metros y el inferior de 33^{m},60, en vez de 5^{m},70 y 35^{m},48 que corresponden al muro últimamente citado, á los mismos niveles.

El muro de que nos estamos ocupando se halla sometido á presiones máximas que no llegan á 8 kilogramos por centímetro cuadrado, tipo aprobado para esta obra por la administración superior francesa. Pueden verse los resultados del cálculo en el siguiente cuadro.

NÚMERO 44

CUADRO *de presiones máximas en la presa del Ban.*

Alturas. — H	PRESIONES MÁXIMAS	
	Exteriores. ρ	Interiores. ρ'
m.	K.	K.
12,00	27.100	36.900
18,00	42.000	50.000
30,00	58.000	72.000
36,00	61.000	72.000
42,00	63.000	71.500

221. *Presa del Ternay*.—Esta obra (fig. 99), establecida en el departamento del *Ardeche*, cerca de *Annonay*, es semejante á las anteriores como forma. Se ha dado á la parte superior de la presa un espesor de 4m,80 y en la base 24,90. La altura es de 34m,35, pero sin incluir un muro de defensa de 4 metros que forma la coronación.

A continuación se indican las presiones á que se halla sometida dicha obra.

NÚMERO 45

CUADRO *de presiones máximas en la presa del Ternay.*

Alturas. — H	PRESIONES MÁXIMAS	
	Exteriores. ρ	Interiores. ρ'
m.	K.	K.
6,85	20.353	38.747
12,35	52.318	52.319
17,85	64.075	52.882
23,35	72.005	53.507
28,85	66.605	54.563
34,35	70.000	60.995

Advertiremos que en la presa de Furens la distancia de la resultante á la arista de giro solo es menor del tercio de la base á la altura de 26 metros, y en la presa del Ban á la de 24 metros; pero las diferencias son insignificantes y de 0m,10 poco más ó menos. Algún mayor valor tiene la discrepancia en la presa del Ternay, por ser de 0m,34 á la altura de 17m,85; así es que creemos hubiera podido aumentarse algo el grueso de esta presa en la citada altura.

222. *Presa del Habra.*—En los *Anales de Opperman* (Diciembre de 1868), se hallará una descripción detallada de la presa que fué construída en el Valle del Habra para formar un embalse de 30 millones de metros cúbicos de agua, con destino al riego de la provincia de *Orán.*

El muro (fig. 100), tiene una altura de $32^m,60$, y su sección, de forma poligonal, se compone de cuatro cuerpos con los paramentos de perfil rectilíneo. El espesor es de $4^m,30$ arriba y $32^m,60$ en la base del último cuerpo. Este descansa sobre un gran macizo de cimentación; se ha establecido, además, en la parte superior un muro de defensa.

Las máximas presiones á que está sometida la presa, son las siguientes:

NÚMERO 46

CUADRO *de presiones máximas en la presa del Habra.*

Alturas. — H	PRESIONES MÁXIMAS	
	Exteriores. ρ	Interiores. ρ'
m.	K.	K.
6,00	30.366	11.281
15,60	40.217	39.944
25,60	54.327	43.929
32,60	65.853	49.230

Esta presa fué destruída en 1881, á los diez años de estar funcionando, por una crecida que arrastró una gran cantidad de mampostería, especialmente por el lado derecho y parte superior, hasta una altura de 18 metros, contados desde la coronación.

Se atribuye principalmente la caída, á la poca solidez del

terreno que le sirve de apoyo, en el cual existen, alternando con bancos compactos, otros arcillosos, que reblandecidos por el agua, dieron lugar á varios asientos en la fábrica, y como consecuencia, á numerosos agrietamientos, que fueron en aumento y debilitaron cada vez más al macizo, hasta el punto de ponerlo en condiciones de no poder resistir á la mencionada crecida.

En la actualidad se hallan recompuestos todos los desperfectos, habiéndose tomado, al parecer, las debidas precauciones para evitar su repetición.

223. *Presa del Villar.*—El aumento siempre creciente del consumo de agua en Madrid, por un lado, y por otro la disminución que en el caudal del río Lozoya se observó durante algunos años de sequía excepcional, pusieron en evidencia la imposibilidad de atender por mucho tiempo á la alimentación de la capital con solo el embalse del Pontón de la Oliva, construído al mismo tiempo que el canal de conducción.

Además, la presa que produce este embalse, por sus condiciones especiales, da lugar á importantes escapes de agua por filtración, que no pueden aprovecharse para el servicio, en atención á hallarse la toma del canal á cierta altura por encima del fonde del valle.

Fundándose en estas circunstancias, el ingeniero D. José Morer, entonces director del Canal, propuso al Gobierno el establecimiento de una nueva presa de embalse, cuyo pensamiento fué inmediatamente aprobado.

El canal de Isabel II, que conduce á Madrid las aguas del Lozoya, con un recorrido de 76 kilómetros, tiene que satisfacer dos necesidades; suministrar agua potable á la población, y permitir el riego de una parte de sus alrededores. Por este doble motivo, se fijó la sección del canal para un gasto de 2.500 litros por segundo, y es evidente que era completamente inútil dar al embalse una capacidad superior al volumen de agua necesaria para satisfacer este gasto durante los meses de estiage. Teniendo en cuenta las pérdidas de todas clases, hallamos que era necesario almacenar una cantidad de liquido de 20 millones de metros cúbicos.

Se ha construído la nueva presa á la distancia de 24 kilómetros agua arriba de la antigua del Pontón, y en un sitio en que el valle del Lozoya ofrece un gran estrechamiento, algo por bajo del puente del Villar, que da su nombre á la obra. Este puente ponía en comunicación las dos vertientes de río; pero quedando inundado con el embalse, ha sido necesario atender al servicio que prestaba, estableciendo el paso público por la parte superior del muro.

La figura núm. 101 da á conocer la forma de la sección de la presa. La latitud es de $5^{m},20$ en la parte superior, en donde existen dos pretiles de $0^{m},55$ de espesor cada uno, que dejan un paso libre de $4^{m},10$. La latitud de la base es de $43^{m},89$ y la altura de $50^{m},00$.

No hemos dispuesto en la parte inferior del muro ningún zócalo ó basamento saliente, según se observa en algunas construcciones de esta naturaleza; los dos paramentos parten de la roca del fondo, en donde están arraigados, por medio de sillares colocados normalmente á dichos paramentos. En el medio de la corriente se hallaba esta roca debajo de una capa de terreno de acarreo de 5 á 7 metros de grueso; valiéndonos de un canal lateral y de una pequeña presa de desviación, pudimos desmontar este terreno y hacer toda la obra completamente en seco.

El vertedero tiene una longitud de 60 metros; su solera se halla $3^{m},00$ más baja que la coronación de la presa, resultando una sección que sobradamente permite el paso de las mayores avenidas del río. Se atraviesa el vertedero por medio de un puente de fábrica con pasamanos de hierro.

La proyección horizontal del muro presenta una forma circular, trazada con un radio de 134 metros, para la arista superior del paramento de agua abajo. El desarrollo de la coronación es de 106 metros, y en la parte inferior casi se unen las dos laderas, formadas de un gneis muy compacto y de gran dureza. Las condiciones de resistencia del muro quedan determinadas por los datos del cuadro siguiente.

NÚMERO 47

CUADRO *de los datos relativos á la sección vertical de la presa del Villar.*

Alturas.	TALUDES		Anchos.	DISTANCIAS		PRESIÓN MÁXIMA		Volúmenes.
— H	Exteriores. x	Interiores. y	— B	Exteriores. d	Interiores. d'	Exteriores. ρ	Interiores. ρ'	— V
m.	m.	m.	m.	m.	m.	K.	K.	m^3
5,00	0,265	0,05	5,51	2,21	2,96	17.084	6.610	26,78
10,00	1,23	0,05	6,73	2,42	3,07	34.849	23.443	57,52
15,20	2,47	0,05	9,31	3,21	3,53	44.877	39.883	97,77
20,00	3,27	0,05	12,63	4,40	4,28	50.603	52.324	152,62
25,00	3,84	0,05	16,52	6,02	5,32	54.821	62.171	225,49
30,00	4,31	0,05	20,88	7,99	6,56	57.637	71.322	318,99
35,00	4,34	1,00	26,22	10,53	8,84	60.511	72.413	436,74
40,00	4,34	1,55	32,11	13,52	11,56	63.202	73.442	582,57
45,00	4,34	1,55	38,00	16,47	14,32	65.358	76.256	757,84
50,00	4,34	1,55	43,89	19,46	17,02	71.817	80.770	962,57

Según se ve en el cuadro anterior, el paramento de agua arriba, hasta una altura de 30 metros por bajo de la coronación, ha sido dispuesto con un ligero talud de $\frac{1}{100}$; la parte análoga del otro paramento ofrece inclinaciones que van en aumento. A partir de los puntos situados á dicha altura y hasta la base, los dos perfiles pueden considerarse como completamente rectilíneos.

Las distancias de la resultante á las aristas, considerando el embalse sucesivamente como lleno y como vacío, son superiores al tercio de la base respectiva. Las presiones exteriores no exceden notablemente del tipo de 7 kilogramos por centímetro cuadrado; las interiores de las seis últimas fajas sobrepujan en un kilogramo, poco más ó menos, las análogas opuestas. Al finalizar este capítulo, nos haremos cargo del motivo en que puede fundarse esta diferencia de presiones.

El perfil poligonal de la sección de presa, trazada según los datos del cuadro, ha sido reemplazado en ejecución, tanto en la parte superior cóncava de agua abajo, como en la unión de las dos inclinaciones rectas de agua arriba, por perfiles curvilíneos, ó por mejor decir, por nuevos polígonos, cuyos lados tienen 2 metros en proyección vertical. Los ángulos formados por estos lados son de gran amplitud y presentan los paramentos el aspecto de superficies continuas.

224. *Presa del Gileppe*.—En la revista universal de Cupper, año de 1886, se inserta una descripción detallada de una presa muy importante por sus dimensiones, construída en Bélgica.

El Ingeniero M. *Bidaut*, autor de esta obra, á pesar de tener conocimiento de las presas modernas ejecutadas en Francia, se ha separado notablemente de los tipos adoptados por sus antecesores. Temiendo, según dice, los desastres que la rotura del muro podría ocasionar en las poblaciones situadas á orillas del río, agua abajo del embalse, ha preferido dar un gran aumento á las dimensiones de la sección, según indica la figura 102.

Tiene el muro una altura de 47 metros y los siguientes es-

pesores: $15^m,00$ en la parte superior; $19^m,50$ á un nivel situado $10^m,50$ por bajo de la coronación; por último, $65^m,82$ en la base.

Si se calculan las presiones, con carga de agua y de vacío, en la base de los dos cuerpos que componen el macizo, se halla:

cuerpo superior con carga..... $\rho = 19.171$
» » de vacío..... $\rho' = 24.154$
cuerpo inferior con carga..... $\rho = 37.050$
» » de vacío..... $\rho' = 93.421$

Estos resultados hacen ver que, á pesar del excesivo volumen de fábrica empleada en este muro, la presión en la arista interior de la base pasa de 9 kilogramos por centímetro cuadrado. Comparando su sección con la del tercer ejemplo anteriormente calculado, (cuadro núm. 40), se deduce la posibilidad de reducir á la mitad el área de la primera, sin que la presión máxima exceda de 7 kilogramos por centímetro cuadrado. Esta reducción hubiera tenido tanta más importancia en la presa del Gileppe, cuanto que su coronación presenta un desarrollo de 235 metros, y la base 83. Su forma en proyección horizontal es circular, con un radio máximo de 500 metros.

225. *Presas de Hijar.*—Las presas de Hijar, en número de dos, tienen por objeto mejorar los regadíos de las Municipalidades de *Hijar*, *Urrea* y de la *Puebla*, comprendidas en la provincia de *Teruel*. Se han escogido para el emplazamiento de estas obras dos notables estrechamientos que presenta el arroyo *Escoriza* antes de unirse con el *Ebro*.

La presa inferior, cuya altura es de 28 metros, se destina á recoger las aguas de un arroyo llamado *Masas*, que desemboca en el *Escoriza*, entre los dos emplazamientos elegidos. El estrecho, en donde se ha situado, no se presta sin gran coste al establecimiento de un muro de mayor altura, y con objeto de completar el embalse de toda el agua necesaria para los riegos, ha sido preciso disponer una segunda presa en el Escoriza agua arriba, dándole la altura de 43 metros.

Fuera de las condiciones especiales que ofrece la localidad, para las obras de que nos estamos ocupando, mucho más eco-

nómico será siempre establecer un muro con la altura suficiente para almacenar toda el agua necesaria, en vez de construir varios de menor elevación.

Se ha adoptado para estos muros la sección de igual resistencia (fig. 103), con espesores de 5 metros en la parte superior y 44,80 abajo. El paramento interior conserva la verticalidad en 25 metros de altura, presenta después taludes que van en aumento hasta la base, y el exterior está perfilado con retallos, según el sistema propuesto por M. Zazilly. En planta es el muro circular, con un radio de 62 metros y un desarrollo de 72 en la coronación.

El siguiente cuadro ha sido calculado tomando por perfil exterior la línea que pasa por las aristas entrantes de los retallos, y la cantidad de 2.200 kilogramos para el peso del metro cúbico de fábrica.

NÚMERO 48

CUADRO *de los datos relativos á la sección de las presas de Hijar.*

Alturas. — H	TALUDES		Anchos. — B	DISTANCIAS		PRESIÓNES MÁXIMAS		Volúmenes. — V
	Exteriores. x	Interiores. y		Exteriores. d	Interiores. d'	Exteriores. ρ	Interiores. ρ'	
m.	m.	m.	m.	m.	m.	K.	K.	m^3
9,00	1,50	0,00	6,50	2,54	2,90	29.005	23.190	51,75
17,00	5,30	0,00	11,80	4,83	3,96	35.866	45.896	123,95
25,00	6,70	0,00	18,50	7,81	5,87	42.797	61.252	245,15
31,00	6,30	1,20	26,00	11,85	8,66	42.198	64.077	378,65
37,00	6,60	2,20	34,80	16,71	12,68	42.673	64.339	561,05
43,00	6,90	3,10	44,80	22,24	17,50	45.444	65.044	799,85

Puede observarse que en estas presas, según sucede también en la del Villar, el paramento interior, con embalse vacío, se halla sometido á mayores presiones que el exterior, contando con la carga de agua.

El tomo 8.° de los *Anales de Obras públicas* contiene, con todos sus detalles, el bien entendido proyecto de los pantanos de Hijar, formado por el ingeniero D. Hermenegildo Gorria.

226. *Presa de Almansa*.—Esta presa, antigua como todas las que siguen, tiene una altura de 20^{m},69 y se compone de cuatro cuerpos (fig. 104). Las presiones en las aristas de las secciones horizontales que los separan, se hallan comprendidas entre 2,70 y 5,00 kilogramos por centímetro cuadrado, pero llegan á alcanzar el valor de 15,30 kilog. en el exterior de la base.

Se comprende que así ha de suceder, y es fácil hacerse cargo de ello, comparando este muro con el perfil de presa aproximado que hemos propuesto. La base de la obra de Almansa tiene una latitud que no llega á la mitad de su altura, y hubiera podido ensancharse á espensas del grueso asignado á la parte superior del cuarto cuerpo, lo cual, sin alterar el volumen existente de 139 metros cúbicos por metro lineal de muro, hubiera dado lugar á una presión más admisible.

227. *Presa de Alicante*.—Se ha empleado en el muro de Alicante (fig. 105) un gran exceso de fábrica, pues comprende toda ella un volumen de 1.130 metros cúbicos por metro lineal, volumen susceptible de reducirse á la mitad.

A pesar de este exceso, la presión en la parte exterior de la base llega á 11,30 kilog. por centímetro cuadrado. Tiene, sin embargo, esta base suficiente latitud para una altura de 40 metros; pero pesa sobre ella inútilmente toda la mampostería que hubiera podido suprimirse arriba, reduciendo el ancho de coronación.

228. *Presa de Elche*.—La presión por centímetro cuadrado á que está sometida la base de este muro (fig. 106), es de 12,70 en el exterior, á pesar de ofrecer la obra un exceso de volumen. Hubiérase mejorado su resistencia ensanchando la base y disminuyendo á la par la latitud de coronación.

229. *Presa de Val de Infierno.*—Basta examinar el perfil de esta presa (fig. 107), para convencerse de que las presiones no han de pasar de los tipos adoptados. Y, en efecto, la mayor es de 6,50 kilog. por centímetro cuadrado; pero el volumen de mampostería excede del doble de lo que sería necesario. Todos los espesores, incluyendo el de la base, son demasiado crecidos.

230. *Presa de Níjar.*—Esta presa (fig. 108), tiene una altura de 27,50 metros y una sección transversal, cuya área mide 499 metros cuadrados. Puede reducirse esta área sin tocar á la base, disminuyendo, como consecuencia, la presión de 7,50 kilogramos por centímetro cuadrado, que tiene lugar en la arista exterior de dicha base.

231. *Presa de Puentes.*—Sabido es el desastre que sobrevino con la rotura de esta presa, á consecuencia de su mala fundación. Hallábase la roca, en el centro del valle, á una profundidad tan considerable, que se desistió de bajar hasta ella la fábrica, estableciéndola sobre pilotaje. Durante una crecida, éste fué arrastrado con el terreno de trasporte que lo envolvía, así como también una gran cantidad de mampostería de la parte inferior del muro, y las aguas del embalse, precipitándose por el boquete abierto, produjeron una extensa inundación que ocasionó muchas víctimas y daños de importancia.

Entre nuestras antiguas presas, la de Puentes es la que presenta una sección más racional (fig. 109). No se halla, sin embargo, exenta de crítica; así, por ejemplo, el paramento de agua arriba es vertical hasta una altura demasiado considerable, lo que motiva la fuerte presión de 12 kilog. á que se encuentra sometida la arista interior de la base sin carga de agua; en la arista exterior y estando lleno el embalse, la presión no excede de 7,50 kilogramos; pero el volumen del muro, que llega á tener 1.519 metros cúbicos por metro lineal, es excesivo, y hubiera podido reducirse á las dos terceras partes.

Esta presa ha sido demolida, para construir, á muy corta distancia agua abajo, otra nueva, á la que se ha dado una

sección de igual resistencia, habiéndose fundado por completo en la roca, hallada en el centro del cauce á 20 metros de profundidad, formando una estrecha garganta.

232. *Presa de Boismelac.*—Entre las antiguas presas francesas, se distingue la de Boismelac por una sección transversal bien estudiada, y que según puede verse (fig. 110), poco se separa de las reglas establecidas.

Las presiones máximas en la base son de 5,90 kilog. por centímetro cuadrado, con carga de agua, y 4,22 de vacío; su volumen es de 91,83 metros cúbicos por metro lineal de muro.

233. *Presa de Lampy.*—Esta presa (fig. 111), análoga á la anterior como altura, no se encuentra tan bien dispuesta. Hubieran podido suprimirse el retallo y el talud interiores. El volumen por metro lineal es de 116 metros cúbicos y susceptible de reducción. Las presiones máximas alcanzan 4,82 kilogramos con embalse lleno y 3,63 kilog. de vacío.

234. *Presa de Gros Bois.*—Esta obra presenta una altura de $21^{m},80$ y un volumen por metro lineal de 226 metros cúbicos, que es algo excesivo; á pesar de esto, la presión exterior en la base llega á la cifra de 10,6 kilogramos (figura 112). Se comprende que volviendo la sección al revés, es decir, colocando los retallos del lado opuesto al agua, se hallaría el muro en mejores condiciones de resistencia.

235. *Presa de Glousel.*—El mismo defecto presenta este muro (fig. 113), que el anterior, en cuanto á su mala disposición; pero como tiene menor altura la presión exterior no excede de 6,69 kil. y la interior de 1,25 kil. La sección vertical mide 72,60 metros cuadrados.

236. *Presa de Vioreau.*—La sección de esta presa (figura 114) constituye un rectángulo, cuyo ancho es los dos tercios de la altura. Las presiones en la base son de 4,84 y 2,42 kilogramos, y el volumen de 82,50 metros cúbicos por metro lineal.

237. *Tipos de presa propuestos por M. Krantz.*—Terminaremos esta revista por el examen de las secciones de presa propuestas por M. Krantz, ingeniero Jefe de Puentes y Calzadas, en la publicación titulada *Étude sur les murs de réservoirs.*

Se compone la sección (fig. 115) de una superficie perfilada por ambos lados según arcos de círculo, y que para las grandes alturas descansa además sobre un zócalo terminado en línea recta. Los anchos de coronación y los radios varían según la altura, hallándose los centros sobre la horizontal del nivel del embalse.

El cuadro núm. 49 contiene los datos necesarios para construir la sección.

Hemos calculado el cuadro núm. 50, en el que aparecen las condiciones de resistencia de la sección con 50 metros de altura, en la hipótesis de una densidad de 2.200 kilog. para la fábrica y reemplazando el perfil circular por otro poligonal inscrito, cuyos lados tienen 7 metros en proyección vertical.

Se han obtenido las presiones en el supuesto de no pasar nunca del punto C el nivel máximo del agua, es decir, que la solera del vertedero se halle por bajo de la horizontal de dicho punto, de manera que la altura CB del muro constituye un parapeto de defensa. Si el agua tuviese que llegar alguna vez á la coronación AB, los anchos superiores serían entonces algo escasos y convendría subir toda la figura, colocando los centros de los arcos de círculo al nivel máximo del embalse.

NÚMERO 49

CUADRO *que indica las principales dimensiones de las presas de embalse propuestas por M. Krantz.*

Alturas del agua.	Altura del primer retallo.	Ancho de coronación	Altura de la coronación sobre el agua.	FLECHA		TALUD DEL ZÓCALO		RADIO DE CURVATURA		Ancho total de la base
				Agua arriba.	Agua abajo.	Agua arriba.	Agua abajo.	Agua arriba.	Agua abajo	
H	H′	AB	BC	DN	LM	GF	IK	R	R′	IF
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
5,00	0	2,00	0,50	1,00	1,00	»	»	13,00	13,00	4,00
10,00	0	2,50	1,00	2,00	2,50	»	»	26,00	21,25	7,00
15,00	0	3,00	1,50	3,00	4,50	»	»	39,00	27,25	10,50
20,00	0	3,50	2,00	4,00	7,00	»	»	52,00	32,07	14,50
25,00	0	4,00	2,50	5,00	10,00	»	»	65,00	36,25	19,00
30,00	0	4,50	3,00	6,00	13,50	»	»	78,00	40,03	24,00
35,00	0	5,00	3,50	7,00	17,50	»	»	91,00	43,75	29,50
40,00	5,00	5,00	3,50	7,00	17,50	3,33	5,00	91,00	43,75	39,83
45,00	10,00	5,00	3,50	7,00	17,50	6,67	10,00	91,00	43,75	48,17
50,00	15,00	5,00	3,50	7,00	17,50	10,00	15,00	91,00	43,75	56,50

NÚMERO 50

CUADRO *de los datos relativos á la sección de presa propuesta por M. Krantz para una altura de 50 metros.*

Alturas. — H	TALUDES		Anchos. — B	DISTANCIAS		PRESIONES MÁXIMAS		Volúmenes. — V
	Exteriores. x	Interiores. y		Exteriores. d	Interiores. d'	Exteriores. ρ	Interiores. ρ'	
m.	m.	m.	m.	m.	m.	K.	K.	m^3
7,00	0,56	0,26	5,82	2,95	2,43	20.200	31.200	55,37
14,00	1,74	0,82	8,38	3,01	3,60	53.000	40.900	105,07
21,00	3,06	1,37	12,81	4,15	5,39	68.700	45.400	179,10
28,00	4,77	1,96	19,54	7,17	8,01	66.800	50.800	299,34
35,00	7,37	2,59	29,50	12,91	11,75	55.300	55.700	464,00
50,00	15,00	10,00	56,50	28,04	25,32	56.300	57.700	1119,00

238. Antes de terminar este capítulo, creemos necesario exponer algunas nuevas consideraciones sobre la resistencia al aplastamiento de los grandes macizos, consideraciones que merecen tenerse presentes.

La aplicación de las dos fórmulas de la ley del trapecio, para determinar las presiones máximas que sufre un macizo sometido á la acción de su propio peso y al empuje del agua, tal como la hemos efectuado, es decir, subdividiendo este macizo por capas horizontales y tomando como fuerza de compresión la componente vertical de la resultante del conjunto de fuerzas que obran sobre la parte superior á cada una de las secciones horizontales, no es exacta, pues da resultados inferiores al máximo de presión que realmente tiene lugar.

La subdivisión por capas horizontales sería lógica si solo actuaran fuerzas verticales; pero desde el momento en que éstas se combinan con el empuje para producir una resultante oblicua, no existe razón alguna que motive la subdivisión horizontal con preferencia á otra cualquiera. Es mucho más racional tomar las secciones en dirección perpendicular á cada resultante respectiva, puesto que entonces ésta no tendrá que reemplazarse por su componente normal y obrará con toda su intensidad, produciendo la verdadera compresión máxima.

En efecto; sea ABCD (fig. 116), un muro sometido á la acción de su propio peso y al empuje del agua, y propongámonos determinar la presión unitaria en un punto M del paramento exterior. Si por este punto se hace pasar una sección hipotética MN, perpendicular á la resultante OK, hallaremos por medio de las fórmulas del trapecio una presión superor á la que resulta considerando la sección horizontal MN′, puesto que para esta última son menores el peso del macizo sobrepuesto y el empuje del agua, obteniéndose así una resultante, no solo más pequeña, sino que de ella únicamente debe tomarse la componente vertical. Cierto es que la sección inclinada es, por otra parte, mayor que la horizontal; con todo, se llega para la primera á una presión unitaria más crecida.

Partiendo de una subdivisión por capas inclinadas, cuyas

bases sean normales á la resultante respectiva, hemos calculado las presiones unitarias que tienen lugar en el paramento exterior del primer perfil (fig. 93) determinado (**194**) bajo las hipótesis de un tipo máximo de 6 kilogramos por centímetro cuadrado y de una distancia mínima del tercio de la base.

Los resultados del nuevo cálculo, así como los que ya se obtuvieron con las subdivisiones horizontales, van expresados en el siguiente estado comparativo.

NÚMERO 51

ESTADO *comparativo de presiones máximas, considerando al muro subdividido por secciones horizontales y por secciones normales á la resultante respectiva.*

Alturas. — H	PRESIONES MÁXIMAS	
	Por capas horizontales.	Por capas inclinadas.
m.	K.	K.
6,00	21.753	23.855
12,00	40.815	53.340
18,00	48.731	65.524
24,00	58.083	66.811
30,00	60.294	69.843

Los resultados de este cuadro hacen ver que la presión máxima, en el caso de subdivisiones inclinadas, no llega á 7 kilogramos por centímetro cuadrado, es decir, que excede en un kilogramo, poco más ó menos, del tipo de 6 kilogramos que sirvió para el cálculo de la sección.

No se han continuado los cálculos más allá de las cinco primeras capas, porque para mayor número sería necesario conocer la sección vertical con una altura de más importancia.

Hallándose ésta limitada á 54 metros, las cuatro últimas capas inclinadas cortan á la base del muro, y entonces es muy difícil, por no decir imposible, determinar el verdadero reparto de presiones sobre una superficie compuesta de dos planos distintos. Si para evitar la dificultad, se hacen partir las últimas subdivisiones de la arista interior de la base, nos separamos entonces de la perpendicular á la resultante, acercándonos tanto más al caso de las divisiones horizontales, cuanto más se desciende.

239. Haremos notar que la indagación de las presiones máximas á que está sometido un macizo, en el supuesto de hallarse subdividido por secciones normales á las resultantes, ofrece alguna pesadez, motivada por la dificultad de fijar *á priori* la inclinación del plano divisorio. Debe éste ser perpendicular á la resultante, la cual depende del peso del macizo superior y del empuje del agua, es decir, de dos elementos ambos variables con la citada inclinación del plano.

Lo más sencillo es proceder por tanteo, pero no es preciso llevar demasiado lejos la exactitud en el trazado, pues aunque la perpendicularidad no sea perfecta, no por esto la presión obtenida diferirá mucho de la verdadera, sobre todo si se toma como fuerza de compresión, en vez de la resultante, su componente normal á la sección oblicua.

Así es como hemos procedido para hallar los resultados del cuadro anterior, operando además gráficamente en lo relativo á la determinación del punto de paso de cada una de las resultantes sobre la base respectiva.

Mayores dificultades ofrecería el método de indagación por capas inclinadas, si se quisiera aplicarlo para hallar directamente el perfil de una presa; así es que no aconsejaremos su empleo, pudiendo muy bien prescindir de él y contentarse con el sistema desarrollado bajo el supuesto de subdivisiones horizontales; lo único que conviene tener presente es la diferencia hallada de un kilogramo, entre los dos sistemas de subdivisión. Si, por ejemplo, no se quiere que la presión máxima sea superior á 7 kilogramos por centímetro cuadrado, se

determinará el perfil tomando como tipo de presión máxima 6 kilogramos.

Pero es oportuno advertir que esta reducción de un kilogramo solo debe aplicarse al paramento exterior, es decir, para el cálculo con carga de agua, pues cuando el embalse está vacío las fuerzas que actúan son todas verticales y no pueden motivar ninguna subdivisión inclicada. En una palabra, si se calcula el perfil exterior bajo el tipo máximo de 6 kilogramos, podrá determinarse el interior con el de 7.

Cuanto acabamos de exponer relativamente á la nueva manera de apreciar la resistencia de un macizo al aplastamiento, justifica la diferencia de un kilogramo, que según hicimos observar (**223**), existe entre las máximas presiones unitarias de una misma faja en los dos paramentos de la presa del Villar.

CAPÍTULO VI

TEORÍA DE LAS BÓVEDAS

240. Tienen por objeto las bóvedas cubrir un espacio determinado. Se construyen con cierto número de piezas de forma conveniente, por lo general unidas con mortero, de manera que constituyan un macizo resistente é indeformable, que se hace descansar sobre estribos ó pilas.

El conjunto de una bóveda presenta diferentes disposiciones; pero por de pronto, solo nos ocuparemos de las bóvedas cilíndricas y rectas, cuyo estudio se reduce al de un trozo cualquiera de las mismas, comprendido entre dos planos paralelos y perpendiculares á las generatrices del cilindro. Conforme se hizo para los muros de sostenimiento, consideraremos una longitud de bóveda igual á un metro.

La sección recta de una bóveda cilíndrica puede ofrecer diversas formas, que dan lugar á las denominaciones siguientes:

Bóvedas de medio punto, cuando el intrados ó sección recta del cilindro se compone de un semicírculo.

Bóvedas rebajadas en arco de círculo, que también se conocen bajo la denominación de *bóvedas escarzanas*, si el arco es menor de 180 grados.

Bóvedas elípticas y *bóvedas carpaneles*; presentan estas últimas un intrados rebajado y parecido al de las primeras, pero con la diferencia de estar trazadas con varios arcos de círculo, cuyos radios son distintos.

Bóvedas ojivales, llamadas tambien *apuntadas*, que están determinadas por dos arcos de círculo descritos con un mismo radio, pudiendo ser éste igual á la luz y con los centros en la línea de arranques.

En todas las bóvedas que hemos reseñado estos arranques se hallan á un mismo nivel; pero existen también bóvedas llamadas *por tranquil*, cuyos nacimientos se encuentran situados sobre una línea inclinada.

Pueden considerarse como un caso particular de las bóvedas rebajadas los *dinteles* ó *bóvedas adinteladas*, cuya superficie de intrados es plana.

Existen, por último, otras secciones de bóveda muy poco empleadas, y cuyo perfil está principalmente motivado por cuestiones de estética.

241. Consideremos una semibóveda ABCD (fig. 117), apoyada por su extremidad CD sobre un macizo de resistencia indefinida, y supongamos que esta semibóveda constituye un monolito de gran dureza; si en un punto M de la cara vertical AB se aplica una fuerza horizontal Q; llamando s al brazo de palanca CE de esta fuerza con respecto al punto C; P al peso de la semibóveda, y l al brazo de palanca KC del centro de gravedad G, referido al mismo punto C, tendremos para el equilibrio de giro alrededor de este punto

$$Q = \frac{Pl}{s}.$$

La resultante de P y de Q tendrá por valor $\sqrt{P^2 + Q^2}$, y pasará por C. Entonces, si se representa por la longitud NK el peso de la semibóveda, la intensidad de la fuerza Q que resulta de la ecuación de equilibrio, estará dada en la misma escala por KC. El punto K es la intersección de la vertical que pasa por el centro de gravedad con la horizontal de C.

Si se asigna á la fuerza aplicada en M una intensidad más pequeña que la anteriormente hallada para Q, obtendremos una nueva resultante tal como NC′; el momento de P será

mayor que el de Q y la bóveda caerá forzosamente hacia dentro.

Si, por el contrario, se aumenta el valor de Q, la bóveda subsistirá en equilibrio, en tanto que la resultante corta á la junta CD; la posición, límite de esta resultante, es la de la recta NDC″; por lo tanto, el equilibrio de la bóveda es compatible con las intensidades de la fuerza horizontal comprendidas entre las que representan las longitudes KC y KC″.

Dando á Q una intensidad mayor que KC″, la bóveda perderá el equilibrio girando hacia fuera alrededor del punto D.

En vez de una semibóveda, consideremos la bóveda completa, compuesta de dos mitades que descansan sobre dos estribos inalterables y se apoyan en el vértice una sobre otra. Se concibe que semejante sistema puede permanecer en equilibrio; cada una de las dos semibóvedas reemplaza á la fuerza horizontal que debe aplicárse á la otra mitad para impedir la caída. De aquí resulta que en el vértice de una bóveda completa se desarrolla un empuje horizontal que, combinado con las reacciones existentes en los arranques, hace equilibrio al peso del macizo.

Para determinar este empuje, es necesario conocer: 1.° Su punto de aplicación M en la junta del vértice (fig. 118). 2.° La intersección I de la resultante $\sqrt{P^2 + Q^2}$, con la junta de arranques.

Estos puntos deben hallarse en el interior de las respectivas juntas; en cuanto se conozca su posición, lo cual depende de las condiciones de la bóveda, será fácil hallar los brazos de palanca $l = \text{IK}$ y $s = \text{NK}$, que con el peso P determinan la intensidad de la fuerza Q.

242. El caso que acabamos de examinar, relativo á dos semibóvedas, cada una de las cuales forma un monolito de gran dureza y que se apoye una sobre otra, es puramente hipotético.

Nos hemos propuesto con este ejemplo dar una ligera idea de las variaciones que puede experimentar el empuje, según sea la posición de los puntos de aplicación de las reacciones. Es evidente que en la práctica se necesitará, además, para el

equilibrio, que los materiales componentes de la bóveda resistan á las presiones á que se hallan sometidos.

Según la definición que hemos dado, consta una bóveda de cierto número de piezas llamadas *dovelas*. Presentan éstas una forma que tiene por límites la superficie de intrados, la de trasdos y dos planos de junta, normales á la primera superficie, que pasan por dos generatrices del cilindro. Con semejante disposición, las dovelas ofrecen en el trasdos una latitud superior á la del intrados; se concibe, pues, que descansando estas piezas mútuamente unas sobre otras, se pueda formar un conjunto susceptible de conservar el equilibrio, como en el caso hipotético antes examinado, y que desarrolle asimismo un empuje horizontal.

Sea ABCD (fig. 119) una semibóveda dividida en cierto número de dovelas, y supongamos conocido el empuje horizontal Q, procedente de la reacción de la otra semibóveda que suprimimos en la figura. Admitamos que el punto de aplicación de Q sea M, y combinemos esta fuerza con el peso de la primera dovela que actúa en su centro de gravedad, obtendremos una resultante que cortará la junta 1 en M_1. Hallemos asimismo la resultante de Q y del peso relativo al conjunto de las dos primeras dovelas; esta resultante cortará á la junta 2 en M_2. Si continuamos fijando la intersección de cada junta con la fuerza que resulta de combinar el empuje Q y el peso del trozo de bóveda situado por encima de esta junta hasta el vértice, obtendremos una serie de puntos M_1, M_2, M_3, ... etc., que, como es sabido, determinan la curva de presión.

243. Según veremos más adelante, las condiciones de equilibrio de la bóveda se deducen de la posición ocupada por esta curva. Para su trazado hemos supuesto que se conocía la intensidad del empuje Q y su punto de aplicación en la junta del vértice. Pero puede también efectuarse este trazado cuando se conocen dos puntos cualesquiera, por los que ha de pasar la curva.

En efecto; supongamos en primer lugar que uno de estos puntos, M (fig. 120), se encuentra sobre la junta del vértice

AB, y que el otro esté en N sobre una junta cualquiera CD; por el centro de gravedad G de la parte de bóveda ABCD se traza la vertical EG prolongada hasta su encuentro I con la horizontal del punto M; es evidente que la recta IN fija la posición de la resultante de Q y del peso del macizo ABCD; por lo tanto, si sobre la vertical de G y á partir de I, se toma, en una escala cualquiera, una longitud IE que representa este peso, la horizontal EF, trazada por E hasta su encuentro F con la resultante dará, en la misma escala, la intensidad del empuje Q. Se tendrán, pues, todos los elementos necesarios para trazar la curva de presión.

Podría suceder que ninguno de los dos puntos por donde ha de pasar la curva se hallase sobre la junta del vértice. Supongamos que uno de estos puntos está situado en K sobre la junta EF (fig. 121), y el otro en N sobre CD. Sean g y G los centros de gravedad de los respectivos trozos de bóveda ABFE y ABCD, y tracemos por estos centros dos verticales, hasta encontrar en h y en H la horizontal del punto N. Debe fijarse sobre esta horizontal un punto R, situado de tal modo, que las dos longitudes hR y HR satisfagan á la relacion

$$\frac{h\mathrm{R}}{\mathrm{HR}} = \frac{\mathrm{P}}{p},$$

en la cual P y p designan los pesos de los macizos ABDC y ABFE. Uniendo los dos puntos R y K, se obtiene una recta que corta á la vertical gh en un punto t perteneciente á la horizontal del empuje en el vértice, y que, por lo tanto, determina el punto de aplicación M.

Para demostrarlo, advertiremos que la recta Rt, que pasa por el punto K de la curva de presión y por el punto de encuentro de la vertical trazada por g con la horizontal del empuje en el vértice, fija la posición de la resultante de p y de Q, y el triángulo rectángulo thR da lugar á la relación

$$th : h\mathrm{R} : : p : \mathrm{Q}.$$

Asimismo la recta NT determina la dirección de la fuerza que resulta de combinar Q con el peso P de ABCD; se verifica, pues,

$$TH : HN :: P : Q.$$

Las dos proporciones anteriores tienen iguales, respectivamente, los términos extremos, y resulta

$$\frac{hR}{HN} = \frac{P}{p},$$

lo que constituye la relación establecida.

Conociendo ya el punto M, se hará el trazado de la curva como antes.

244. La posición de esta curva indica las condiciones de resistencia de la bóveda. El equilibrio exige que la curva corte á todas las juntas en el intervalo que miden, es decir, que debe hallarse en su totalidad, comprendida en el espesor del macizo.

Esta condición no sería indispensable si la bóveda solo se compusiera de dos trozos de gran resistencia; bastaría entonces que esta curva, susceptible de trazarse por puntos, mediante una subdivisión ficticia cualquiera en dovelas, cortara en su interior á las juntas extremas y á la del vértice; pero en los intervalos podría muy bien salirse del espesor del macizo sin que el equilibrio dejara de subsistir. Pero siendo real la división en dovelas, debe la curva cortar á todas las juntas, por más que éstas se hallen trabadas con mortero, pues en la práctica no conviene atender á la cohesión de este material.

Cuando la curva de presión está contenida en toda su longitud en el espesor de la bóveda, y que ésta se apoya sobre estribos muy resistentes, el movimiento de giro de una parte cualquiera del macizo se encuentra contrarrestado. Puede determinarse entonces la máxima presión unitaria, que tiene lugar en una junta cualquiera aplicando la ley del trapecio; es preciso, para esto, tener en cuenta la intensidad de la resultante y su

punto de aplicación, que coincide con el punto de paso de la curva de presión sobre dicha junta. Por último, en vista de la dirección de los planos de junta que se disponen normalmente á la superficie de intrados, las diversas resultantes cortan á estos planos bajo un ángulo que difiere poco de 90°, de donde resulta imposibilitado el movimiento de resbalamiento de unas dovelas con otras. Existirá, pues, equilibrio bajo todos conceptos, admitiendo, sin embargo, que los materiales no puedan ser aplastados por la compresión.

245. Se deduce, como consecuencia de lo que acabamos de exponer, que el equilibrio de una bóveda se verificará en las mejores condiciones, si la curva de presión coincide con la que resulta de unir los puntos medios del espesor, pues entonces la presión unitaria será un mínimum é igual en toda la extensión de una misma junta. Esta circunstancia favorable permite reducir todo lo posible el espesor de la bóveda, espesor que deberá variar en cada junta proporcionalmente á la cantidad $\sqrt{P^2 + Q^2}$, la cual aumenta, á partir de arriba, con el peso P correspondiente á la parte de bóveda comprendida entre el vértice y la junta que se considera.

En semejante caso, y suponiendo que se haya fijado el intrados de la bóveda por condiciones de conveniencia ó de estética, podrá determinarse el trasdos de manera que la presión unitaria tenga en todas las juntas un mismo valor compatible con la resistencia de los materiales empleados. Será fácil también deducir el valor $\sqrt{P^2 + Q^2}$ de la resultante, en los arranques, y determinar luego el espesor que convenga asignar á los estribos para oponerse á cualquier movimiento de la bóveda.

Pero desgraciadamente la curva de presión media dista mucho de realizarse en las bóvedas generalmente construídas; es muy difícil, además, fijar con cierto grado de exactitud la verdadera posición de esta curva. por depender de un gran número de condiciones, muy variables en su mayoría de una obra á otra, algunas de ellas imposibles de prever y de apreciar con alguna certeza. De aquí resulta, que el problema relativo al

equilibrio de las bóvedas es matemáticamente insoluble; es forzoso contentarse con resultados aproximados, que aunque admisibles en la práctica, no dejan de ser susceptibles de algunos errores.

Esta falta de exactitud es común á todas las construcciones, pero afecta más especialmente á las de mampostería, y sobre todo á las bóvedas. Se origina, pues, la necesidad de tener que dar á todas ellas un exceso de resistencia para hacer frente á todos los casos imprevistos, y á la incertidumbre que reina en la solución del problema de estabilidad.

246. La determinación de la curva de presión, curva que da á conocer la resistencia de una bóveda, constituye el principal objeto de todas las teorías modernas que se han escrito sobre el equilibrio de esta clase de macizos. Pero los resultados obtenidos por los autores de dichas teorías son consecuencia de cierto número de hipótesis más ó menos realizables y algunas de ellas inadmisibles.

Entre todas estas teorías, la que conceptuamos más racional y más próxima á la realidad de los hechos prácticos, es debida á *M. Dupuit*, inspector que fué de Puentes y Calzadas. Este eminente ingeniero, con aquella gran claridad que se observa en sus numerosos é importantes escritos, expone la nueva teoría en la obra publicada en 1870, después de su fallecimiento, y que lleva por título *Traité de l'equilibre des voûtes et de la construction des ponts*. Se hallará un extracto bastante extenso de la mencionada teoría en las últimas ediciones del formulario de *M. Claudel.*

Dice M. Dupuit, que cuando una bóveda descansa aún sobre su cimbra, *no existe todavía* la presión sobre las dovelas, llamada comunmente *empuje*, pues no empieza á manifestarse sino cuando se baja dicha cimbra; va entonces en aumento, hasta el instante en que ésta se separa de la bóveda.

El desarrollo de este hecho, y el análisis de lo que se verifica durante la operación del descimbramiento, conducen á M. Dupuit á establecer los nuevos principios siguientes:

«En una bóveda simétrica, la curva de presión de una de

las dos mitades, no tiene dos puntos indeterminados, como se pretende hoy día; uno de estos dos puntos se halla necesariamente colocado en el intrados, y es alrededor del que gira la semibóveda al descimbrarse, apoyándose en la clave sobre la otra mitad.

En una bóveda completa, la curva de presión es tangente á la de intrados; si esta bóveda no comprende más que la parte superior al punto de tangencia, la curva de presión pasa por los arranques y no es ya tangente al intrados.

En las bóvedas elípticas completas, la junta de rotura, salvo el caso de un perfil excepcional, se halla situada hacia la mitad de la altura del claro.

Cuando la bóveda no es simétrica, la mitad que produce mayor empuje es la única que ofrece una junta de rotura; en la otra mitad, la curva de presión se separa del intrados.»

247. Veremos más adelante, como se determina en las bóvedas completas, el punto donde tiene lugar el contacto entre la curva de presión y el intrados, así como el punto de aplicación del empuje en la junta del vértice. Según dice M. Dupuit, estos puntos determinan la curva de presión, pudiéndose con ellos efectuar su trazado y resolver por completo el problema de equilibrio de las bóvedas.

Hemos dicho, sin embargo, que este problema era matemáticamente insoluble. Y, en efecto, los principios de M. Dupuit, por más que sean racionales, deben considerarse como principios teóricos, únicamente realizables en casos muy excepcionales. En la práctica ordinaria de las bóvedas deben estos principios modificarse en algún tanto, pues es realmente imposible admitir que el movimiento que toma la curva de presión durante el descimbramiento, se para precisamente en la posición que la hace pasar por una arista de intrados. Se concibe que en semejante caso esta arista estaría expuesta á una presión unitaria muy considerable, lo cual produciría una rotura que en general no se observa en las construcciones existentes.

Apoyándose en estas últimas observaciones, critican algunos constructores la teoría de M. Dupuit; pero no llegaremos

como ellos hasta suponerla inadmisible, pues á pesar de la incertidumbre inherente é inevitable en la clase de construcciones á que se aplica, concuerda mejor dicha teoría con la realidad de los hechos que todas las demás conocidas.

Trataremos de apreciar más adelante el valor que puede atribuirse á la crítica de la nueva teoría, cuando la hayamos desarrollado más extensamente, por medio de varias consideraciones importantes.

248. Solo mediante apreciaciones relativas al asiento es como puede tratarse de indagar la curva de presión que tiende á realizarse; pero vamos á ver que en el movimiento producido con el descimbramiento hay algo cierto y fijo, que solo depende del perfil de la bóveda, y algo incierto, que procede de la naturaleza de los materiales y del sistema de construcción; de modo que, aun cuando el problema permanece indeterminado, no lo es ya sino entre límites tan poco distantes, que no existe gran interés para la práctica en estrecharlos más.

Consideremos una bóveda circular rebajada ABDC (figura 122), y examinemos el movimiento que va á producirse durante el descimbramiento. En el origen de la operación no existe en la clave empuje horizontal; las dovelas descansan sobre la cimbra y solo actúan fuerzas verticales procedentes del peso del macizo. Si en semejantes condiciones queremos trazar la curva de presión, no hay más que buscar el punto de encuentro de cada junta prolongada, con la vertical del centro de gravedad perteneciente á la parte de bóveda superior á la junta que se considera. Extendiendo este procedimiento hasta el estribo CDFE inclusive, hallaremos la curva K′M′L′D′N′.

Esta curva es puramente ideal, y solo tiene por objeto indicar el punto alrededor del cual va á girar la bóveda; se ve inmediatamente que será D el punto de giro.

Puede comprobarse este resultado, ó conseguirlo directamente, buscando el punto de intrados para el cual el empuje Q, procedente del macizo que tiene encima hasta la clave, es un máximo. Esto es evidente, pues si aplicamos en la clave un empuje menor, el equilibrio quedará destruído girando la bó-

veda alrededor del punto que corresponde al máximo de Q.

Para hacer esta indagación, designemos por x, y, las coordenadas de un punto cualquiera O de intrados, con respecto á dos ejes rectangulares KX, KY, que pasan por el vértice de la curva de presión; por ε la abscisa del centro de gravedad relativo á la parte de bóveda ABOI; será también la abscisa del punto L′ perteneciente á la curva K′M′L′D′N′; por p el peso de dicha parte de bóveda. El equilibrio alrededor de O da lugar á un empuje expresado por

$$Q = \frac{p\,(x - \varepsilon)}{y}.$$

Pero si para una bóveda rebajada, como la que se considera, damos sucesivamente á x, y, ε, valores correspondientes á diferentes juntas, se hallará que el máximo de Q se verifica para la junta de arranques, es decir, que la bóveda tiende á girar alrededor del punto D.

La curva K′L′M′D′N′ ha sido obtenida suponiendo que la bóveda descansa completamente sobre la cimbra. Admitamos ahora un pequeño descenso de este apoyo, pero de manera que no deje aún de sostener en parte á la bóveda. Esta última bajará al mismo tiempo; las juntas se estrecharán comprimiendo al mortero interpuesto, y se desarrollará en el vértice un empuje Q_1 menor que el máximo hallado para el equilibrio alrededor del punto D. Si partiendo del empuje Q_1 se construye la curva de presión, obtendremos una línea tal como KM″L″D″N″, la que en parte se halla fuera del espesor de la bóveda y corta al intrados en dos puntos. Esta curva acusa aún más marcadamente la tendencia del giro alrededor del punto D.

Si continuamos bajando la cimbra con lentitud y por grados insensibles, aumentará el empuje, y la curva se acercará á D. Al llegar á este punto subsiste el equilibrio, el empuje adquiere el valor máximo, relativo á D, y ya entonces puede quitarse la cimbra por completo.

Pero si ésta ha bajado bruscamente ó por sacudidas, la

curva de presión irá más allá del punto D hacia el interior de la junta, lo que denota un aumento de empuje; pero tan pronto como cese este movimiento de la bóveda, el empuje disminuirá, la curva se aproximará de nuevo al punto D, y podrá aún salvarlo en sentido inverso, dando lugar á una serie de oscilaciones que dependerán de la elasticidad de los materiales, y tendrán su término en una posición correspondiente al equilibrio de la bóveda, con respecto al punto de contacto sobre la junta de arranques.

249. Acabamos de fijar uno de los dos puntos de paso necesarios para el trazado de la curva de presión, y hemos visto que en una bóveda circular rebajada, este punto se encuentra situado sobre la arista de intrados de los arranques. Puede también determinarse para la clave, si bien no el punto mismo de aplicación, por lo menos el espacio en que se halla situado en las diversas clases de bóveda, pues la posición de este punto puede quedar modificada por algún vicio de construcción.

Así, por ejemplo, un retroceso horizontal del punto D, tiene por resultado disminuir la presión en B y aumentarla en A, es decir, que hace subir el punto de aplicación del empuje hacia el vértice de la clave; efecto tanto más indicado, cuanto mayor es el retroceso. Esta modificación puede manifestarse, aunque poco, en las bóvedas mejor construídas, y es, por lo tanto, de gran importancia para la solidez de la obra que la parte situada por bajo de la charnela ofrezca la suficiente resistencia, al objeto de ceder lo menos posible.

Por encima de la charnela podrán también los vicios de construcción modificar el trazado de la curva de presión, estableciendo un punto de paso obligado. Un grano grueso de arena colocado en una junta es susceptible de concentrar la presión alrededor de aquel punto, y hacer pasar por él la referida curva. Un resultado análogo puede también proceder de un corte defectuoso en las juntas de dos dovelas contiguas, haciéndolas apoyar en dos barrigas ó salientes. Si las dovelas de la clave se han adelgazado demasiado hacia el trasdos, ó presentan allí juntas muy abiertas, bajará el punto

de aplicación del empuje; un defecto contrario lo haría subir.

Prescindiendo de todos estos defectos, que corroboran lo dicho sobre la incertidumbre que existe para determinar en la práctica la verdadera posición de la curva de presión, puede calcularse fácilmente el punto de empuje en la clave. En efecto; resulta como consecuencia del giro de la bóveda alrededor del punto D, que en A y B existen compresiones distintas, pues éstas han de ser evidentemente proporcionales á los espacios que recorrerían dichos puntos si estuvieran libres. Designemos por

r, la distancia DB;
R, la distancia DA;
f, la flecha BS;
e, el espesor de clave AB;
α, el ángulo BDS;
β, el ángulo ADS.

Con la rotación de la bóveda alrededor del punto D, los ángulos α y β disminuirían de una cantidad igual, si la semibóveda no hallase obstáculo ninguno; la línea AB se trasladaría á A′B′. Pero el obstáculo tiene por efecto mantener AB en la vertical, y de esto resulta que la compresión en cada punto es proporcional á la disminución de las proyecciones horizontales de los radios que unen el punto D con cada uno de los de la junta AB.

La proyección del radio R es R cos. β; si β disminuye en la cantidad $d\beta$, dicha proyección aumentará en R sen. $\beta\, d\beta$; pero tenemos

$$\text{R sen. } \beta = f + e;$$

luego la compresión en A es proporcional á

$$(f + e)\, d\beta;$$

en B, según el mismo cálculo, sería proporcional á

$$f d\alpha;$$

pero como se verifica $d\beta = d\alpha$, resulta que las compresiones en A y en B son entre sí como

$$f + e : f.$$

De aquí se deduce que el punto K, en donde actúa la resultante de las presiones, no se halla en el medio de AB, sino que se acerca más al punto A.

Designando por P y p las presiones unitarias máxima y mínima en las extremidades de la junta AB, por e el ancho de esta junta, y por c la distancia de la resultante al punto B, tenemos, según la ley del trapecio (**12**),

$$\frac{P}{p} = \frac{3c - e}{2e - 3c}.$$

Después de reemplazar en esta ecuación $\frac{P}{p}$ por $\frac{f+e}{f}$, se deduce

$$c = \frac{e(3f + 2e)}{3(2f + e)} = \frac{1}{2} e \left(1 + \frac{e}{6f + 3e}\right),$$

lo que indica que c es siempre mayor que $\frac{1}{2} e$. Cuando $f = 0$, y es el caso de un dintel, resulta

$$c = \frac{2}{3} e.$$

No siendo nula la flecha, la distancia c se halla comprendida entre la mitad y los dos tercios del espesor de la bóveda.

Este resultado supone que los estribos permanecen invariables; *M. Dupuit* admite la posibilidad de un retroceso más ó menos sensible para el punto D, movimiento que tendría por efecto disminuir la presión en B, y por lo tanto, haría subir el punto K. Si el retroceso tomase el valor $fd\alpha$, que hemos hallado como aumento de la proyección horizontal del radio

DB, la presión en B se anularía y tendríamos $c = \frac{2}{3} e$.
Con un retroceso mayor, el punto K se acercaría aún más al punto A; pero para que exista equilibrio, estos dos puntos nunca deben llegar á confundirse.

Vemos, pues, que el punto de paso de la curva de presión en la clave, se encuentra á una distancia del intrados expresada por

$$c = \frac{e\,(3f + 2e)}{3(2f + e)},$$

siempre que los apoyos D puedan ser considerados como invariables; lo cual tendrá lugar para una pila colocada entre dos bóvedas simétricas y terminada en la coronación por un sillar; pero tratándose de un estribo poco resistente, ó admitiendo que el mortero se encuentre todavía blando, el punto D retrocederá sensiblemente, el vértice de la curva de presión subirá á lo largo de BA, y la junta de la clave podrá abrirse en B.

250. Hemos determinado los dos puntos de paso que permiten fijar la posición de la curva de presión; uno de estos puntos, llamado *punto charnela*, está situado en los arranques á gran proximidad del intrados; pero, según hemos advertido, no puede admitirse que coincida con la arista misma de la dovela sin dar lugar al aplastamiento de la piedra, y es indispensable suponerlo algún tanto separado de esta arista; es lo que se verifica en la práctica en la mayoría de los casos, mediante el mortero interpuesto en las juntas y cuya influencia vamos á examinar.

Supóngase que el rectángulo ECDF (fig. 123) representa la capa de mortero colocada encima del salmer de arranques. A consecuencia del movimiento de giro de la bóveda, la recta CD se inclina para tomar la posición DC′, que conservaría si fuese incompresible el mortero; pero como no sucede así, habrá penetración de la dovela superior en la masa compresible, y la junta rectangular se convertirá en el trapecio EF*dc*,

Desde d hasta m existirá compresión; más allá de este punto la junta se abre cada vez más, hasta el trasdos. Esta grieta, observada con frecuencia en la práctica, demuestra que la resultante de las presiones pasa á una distancia del intrados inferior al tercio del ancho de la junta; según la ley del trapecio, es igual esta distancia á la tercera parte de la longitud dm del contacto.

La presión unitaria máxima, que tiene lugar en la arista, es doble de la presión media obtenida dividiendo el empuje oblicuo de la bóveda $\sqrt{P^2 + Q^2}$, por esta longitud dm; y como dicha longitud, aunque variable, es una cantidad real, la presión en la arista no puede tener el valor infinito que le atribuyen los adversarios de la teoría de M. Dupuit.

Examinemos las causas susceptibles de hacer variar la distancia dm. Se tiene, en primer lugar, el espesor de la capa del mortero y su grado de compresibilidad, que al aumentar, hacen crecer esta distancia, pues dan lugar á mayor penetración de la dovela y hacen avanzar dm hasta $d'm'$, por ejemplo.

En segundo lugar, el empuje oblicuo $F = \sqrt{P^2 + Q^2}$ de la bóveda es proporcional á la superficie $m\mathrm{D}d$, y la presión unitaria en la arista varía proporcionalmente á $\mathrm{D}d$; de manera que si designamos por A un coeficiente constante, y por α el ángulo C'DC de rotación de la junta, se tiene

$$m\mathrm{D} \times \text{tang.}\,\alpha = \mathrm{D}d;$$

$$F = A \times m\mathrm{D} \times \mathrm{D}d = \frac{A \times \overline{\mathrm{D}d}^2}{\text{tang.}\,\alpha};$$

de donde se deduce

$$\mathrm{D}d = \sqrt{\frac{F}{A}\,\text{tang.}\,\alpha},$$

lo que indica que la presión en la arista crece proporcionalmente á la raíz cuadrada del empuje F, y también proporcionalmente á la raíz cuadrada de la tangente de α.

Existe, pues, gran interés en que la bóveda gire lo menos

posible alrededor del punto D (fig. 122). Habrá siempre un pequeño movimiento, pero crece éste mucho con un retroceso de dicho punto D, y si el estribo no ofrece la suficiente resistencia, podrá sobrevenir rotura de la piedra en la arista.

251. Entre las causas susceptibles de alejar ó aproximar del intrados la curva de presión, y por lo tanto de disminuir ó aumentar la presión máxima en aquel sitio, no hemos hecho figurar la longitud de la junta. La razón es muy sencilla: desde el momento en que, según la experiencia, admitimos la apertura de una grieta en el trasdos, toda la longitud de junta que no está en contacto con el mortero carece de influencia sobre la presión, y resulta al mismo tiempo que la longitud Dm del contacto (fig. 123) es independiente de la longitud total DC de dicha junta. Podría, pues, acortarse esta junta de toda la parte correspondiente á la grieta, sin destruir por esto el equilibrio. Opinamos que sin motivo fundado pretenden algunos constructores disminuir la presión máxima en la junta de rotura aumentando la longitud de las dovelas, ó sea el espesor de la bóveda, á partir de la clave hacia los arranques; solo puede ser útil este aumento cuando, por medio de ciertos artificios de construcción, de que hablaremos más adelante, se obliga á la curva de presión á pasar más hacia el interior de la junta.

Fuera de este caso y en las construcciones ordinarias, es preciso conformarse con admitir que la curva de presión cruza á la junta de rotura á proximidad del intrados y á una distancia menor que el tercio de la longitud de la junta. Es difícil determinar esta distancia con alguna precisión, por causa de los múltiplos elementos susceptibles de alterarla, lo cual constituye un inconveniente para poder apreciar el valor de la máxima presión á que se halla sometida la fábrica; pero esta dificultad no debe considerarse como motivo suficiente para desconocer la validez de los principios en que se funda la teoría de M. Dupuit.

252. Habiendo expuesto las consideraciones que anteceden, creemos hallarnos ya en estado de poder contestar á las objeciones presentadas sobre esta teoría. Si se admite la exactitud

de la misma ¿por qué no saltan las dovelas en los puntos de giro de los grandes puentes construídos, puesto que, según estos principios, están expuestas á grandes presiones, mucho más considerables que las que señala para estas obras el cálculo, fundado en una falsa teoría?

A esta objeción, contesta M. Dupuit en los siguientes términos: «Es evidente que por esto no se romperá la dovela, y lo motiva principalmente: 1.° El no haber llegado todavía al límite de resistencia de la piedra. 2.° Aunque se hubiese alcanzado este límite, como dicha presión máxima solo se verifica en un punto, nunca puede producir el mismo efecto que si existiese en toda la extensión de la superficie de contacto. 3.° Por esmerada que sea la labra, la arista de la dovela se encuentra siempre redondeada, lo cual puede disminuir la cifra de la máxima presión. 4.° Entre dos dovelas se encuentra una almohada de mortero. 5.° Las piedras de gran dimensión han de ofrecer una resistencia proporcionalmente mayor, que la obtenida por medio de experiencias verificadas con pequeños cubos.»

Consideramos que los buenos resultados obtenidos en la construcción de las grandes bóvedas, deben atribuirse en gran parte á la existencia del mortero. Hemos examinado la influencia ejercida por este material en la rotación de la bóveda, y vimos que establece una superficie de contacto inferior á la longitud de la junta, pero con cierta extensión sobre la que se reparte forzosamente el empuje oblicuo, dando lugar á un máximo de presión unitaria admisible, según demuestra la experiencia.

Es evidente que los otros motivos referentes á la resistencia de la piedra y á la redondez de la arista tienen una importancia muy considerable, según veremos también más adelante; pero en muchos casos esta importancia es inferior á la del mortero. Tan cierto consideramos esto, que no titubeamos en afirmar que, si se construye un puente de cierta magnitud, es decir, que dé lugar á un gran empuje, y se emplea en la construcción de la bóveda piedra blanda ó de escasa resistencia; si además se disponen las juntas de las dovelas muy apretadas sin el suficiente mortero, ó como suele llamarse, á hueso, lo

cual constituye un defecto de que adolecen algunos constructores, pretendiendo así demostrar gran esmero en la mano de obra; en semejantes condiciones, decimos, será muy fácil ver saltar las aristas de las juntas de rotura, así como también las inmediatas.

Hemos observado este efecto en un puente acueducto del Canal de Isabel II, que se encuentra en circunstancias análogas á las anteriormente supuestas.

253. Se objeta aún, que el principio de la rotación alrededor de la arista de intrados de las juntas de rotura, no es admisible para las antiguas bóvedas construídas por los romanos sin mortero, y en las cuales se conservan las aristas en buen estado.

Para hacernos cargo del valor de esta objeción, vamos á examinar una de las mayores bóvedas que conocemos, construídas en seco por los romanos. Pertenece esta bóveda al puente de Alcántara, sobre el Tajo, y constituye un medio punto de 30 metros de luz, cuyas dovelas son de granito, pesando 2.500 kilogramos por metro cúbico, y que según las experiencias conocidas, resiste sin romperse hasta la presión de 700 kilogramos por centímetro cuadrado próximamente.

Por los medios que se indicarán más adelante, hemos calculado el empuje oblicuo de esta bóveda en la junta de rotura, es decir, el valor de $\sqrt{P^2 + Q^2}$, considerando sucesivamente al macizo sin sobrecarga, ó con todo el peso de fábrica que soporta la parte aparejada en dovelas. Resulta para el primer caso un empuje de 48.900 kilogramos por metro lineal de cilindro, y es el que se verifica al descimbrar la bóveda; para el segundo se obtienen 123.900 kilogramos.

Pero admitiendo que la piedra resista á la mencionada presión de 700 kilogramos, será preciso, para que las aristas no salten, que el contacto en las juntas, cerca del intrados, se verifique sobre una faja de un ancho mínimo de $0^m,007$, suponiendo la presión uniformemente distribuída; ó un contacto de doble extensión, es decir, de $0^m,014$, cuando esta presión varíe entre

cero y el máximo. En el caso de existir sobrecarga, estos anchos se convierten respectivamente en $0^m,0175$ y $0^m,035$.

Pero debe observarse que la resistencia del sillar que compone una dovela será proporcionalmente mucho mayor, según dice con razón M. Dupuit, que la indicada en los cuadros de resistencia al aplastamiento, formados por medio de experiencias hechas en su mayoría con pequeños cubos de un centímetro de lado.

Advertiremos, además, que la compresibilidad mayor ó menor de la piedra, las asperezas de la labra, y aun si se quiere, un principio de aplastamiento de estas mismas asperezas, darán lugar á cierta penetración que establece una superficie de contacto más ancha que la anteriormente calculada como necesaria. Se verificará algo análogo á lo que se ha explicado para una junta con mortero, y la extensión del contacto será tanto más considerable, cuanto menor sea el ángulo de giro. Sabido es el gran esmero con que labraban los romanos los lechos de asiento de las hiladas, lo cual establecía una coincidencia casi perfecta entre las superficies contiguas; con semejantes condiciones, y además con un buen cierre en la clave, puede conseguirse un asiento, y por lo tanto, una rotación durante el descimbramiento, casi nulos. Además, en las bóvedas de medio punto, dicha rotación se distribuye en varias juntas próximas á la de rotura, unas situadas por encima y otras por debajo; la rotación parcial en cada junta será, pues, inapreciable, verificándose el contacto sobre cierta extensión superficial, y se concibe que bastará una pequeñísima separación en los bordes de las juntas para impedir la rotura de las aristas. Esta separación, insensible á simple vista, podría, por ejemplo, no ser más que la necesaria para permitir la introducción de una hoja delgada de cuchillo á lo largo del borde y hasta una profundidad igual, á lo más, al ancho de la cinceladura de la arista.

Por último, puede efectivamente reconocerse el buen estado de algunas construcciones que todavía subsisten; pero es preciso conceder también que gran número de antiguas bóvedas han desaparecido, por encontrarse en peores condiciones

de resistencia, ya sea bajo el punto de vista de la dureza de la piedra, como con respecto al esmero de la mano de obra.

Con lo dicho creemos haber contestado debidamente á las objeciones hechas á la teoría de Dupuit, y demostrado al mismo tiempo, que el principio de la rotación alrededor de una arista de intrados es *teóricamente* admisible.

254. Ocupémonos ahora en determinar el punto de giro de las bóvedas completas, es decir, de aquellas que se unen con sus pies derechos, por medio de un elemento vertical.

Se demuestra, por un razonamiento análogo al que se ha empleado para las bóvedas circulares rebajadas, que un punto de la curva de presión debe hallarse sobre el intrados, y al descimbrar girará la bóveda alrededor de este punto. En este caso la curva de presión será necesariamente tangente al intrados, pues si no sucediese así lo cortaría en dos puntos, y parte de la curva se hallaría fuera del macizo; por lo tanto, el equilibrio no podría subsistir.

Hemos obtenido (**248**) para la intensidad del empuje relativo al trozo de bóveda comprendida entre la clave y una junta cualquiera

$$Q = \frac{p\,(x - \varepsilon)}{y},$$

en cuya expresión x é y representan las coordenadas del punto de intrados correspondiente á la junta que se considera, p el peso de esta parte de bóveda, y ε la abscisa de su centro de gravedad. Si cambiamos la posición del punto del intrados se obtendrán valores distintos para el empuje, y es evidente que el punto de giro será aquel que da un máximo para dicho empuje, pues asignando á éste una intensidad menor, la bóveda girará alrededor de aquel punto, quedando roto el equilibrio.

La solución del problema se reduce, pues, á reemplazar en la anterior expresión de Q, y por su valor en x, deducido de la ecuación de la curva de intrados, y á igualar luego á cero la derivada con respecto á la última variable. Se obtiene así una

ecuación de la que podría deducirse la abscisa del punto de rotura.

255. Pero se logra más sencillamente el mismo resultado por medio de las siguientes consideraciones debidas á MM. *Lamé* y *Clapeyron*.

Tomemos una semibóveda ABDC (fig. 124), en la cual se reemplazan las juntas de dovela normales al intrados por juntas verticales; esta hipótesis no influye en el resultado que vamos á obtener. Si D es el punto de rotura, es decir, el correspondiente al máximo empuje, claro está que este empuje no variará tomando un nuevo punto D′ colocado á una distancia de D infinitamente pequeña; pero entonces el peso p de la bóveda ABDC habrá aumentado con el de la parte CDD′C′ que designamos por dp. Suponemos que la vertical RN pasa por el centro de gravedad G de la superficie ABDC, y que el empuje en la clave actúa según la horizontal MX; el brazo de palanca de este empuje con respecto á D es $\mathrm{SD} = y$, y con respecto á D′, $\mathrm{SD} + \mathrm{DL} = y + dy$; asimismo el peso p tiene por brazo de palanca, referido á D, la recta ND, que designaremos por x_1; la cual se convierte en

$$\mathrm{ND} + \mathrm{LD}' = x_1 + dx_1,$$

tratándose del punto D′.

Se obtendrá el momento del peso $p + dp$ con respecto á este último punto añadiendo los momentos de sus dos componentes, y es

$$p\,(x_1 + dx_1) + dp \times dx_1;$$

como el empuje no se altera pasando de D á D′, resulta

$$\mathrm{Q} = \frac{px_1}{y} = \frac{p\,(x_1 + dx_1) + dp \times dx_1}{y + dy}.$$

Despreciando el infinitamente pequeño de segundo orden

$dp \times dx_1$, se halla

$$\frac{px_1}{y} = \frac{p\,(x_1 + dx_1)}{y + dy}\;;$$

de donde se deduce

$$\frac{x_1}{y} = \frac{dx_1}{dy}\;.$$

Pero $\frac{x_1}{y}$ representa la tangente trigonométrica del ángulo formado con la vertical por la línea RD que coincide con la resultante de p y de Q; por otro lado, la relación $\frac{dx_1}{dy}$ indica la inclinación de la tangente en el punto D de intrados. Resulta, pues, que esta tangente se confunde en el punto de rotura con la resultante, la cual parte del punto de encuentro R de la vertical que pasa por el centro de gravedad de la bóveda con la horizontal del empuje. Puede, pues, establecerse el siguiente principio:

El punto de rotura es aquel en que la tangente de intrados corta á la horizontal del empuje en la clave, en el mismo punto que la vertical pasando por el centro de gravedad del macizo que tiende á desprenderse.

256. Valiéndose de este principio se hallará fácilmente la posición de la junta de rotura en una bóveda cualquiera, aplicando el siguiente procedimiento gráfico.

Advertiremos desde luego que en las bóvedas de medio punto, así como en los arcos campaneles, el punto de giro se halla hacia la mitad de la altura de la flecha.

Tómase sobre el intrados varios puntos D′, D″, D‴ (figura 125), que comprendan entre sí el punto buscado, y determínense los centros de gravedad de las superficies

ABD′C′, ABD″C″, ABD‴C‴,

comprendidas entre el vértice y las juntas D′C′, D″C″, D‴C‴; se trazarán por un lado las verticales g', g'', g''' que pasan por

estos centros de gravedad, y por otro las tangentes de intrados en los puntos D′, D″, D‴; las intersecciones de cada vertical con la tangente correspondiente determinarán los puntos m', m'', m''', que deben unirse por una curva llamada de error. Cortará esta curva á la horizontal del empuje en un punto m, por el cual habrá que trazar una tangente mD al intrados; el punto de contacto D será el de rotura.

Observaremos que la vertical del punto m pasa por el centro de gravedad de la parte de la bóveda ABDC correspondiente al máximo empuje y cuyo peso será fácil calcular; la horizontal SD da en magnitud el brazo de palanca de este peso, así como Sm es el brazo de palanca del empuje, y la tangente mD fija la posición de la resultante. De manera que si llevamos sobre la vertical, á partir de m, una longitud mT proporcional al peso de la bóveda ABDC, la horizontal TR representará en la misma escala la intensidad del empuje horizontal Q.

257. Sabiendo hallar el punto de rotura, será fácil en muchos casos hacerse cargo de la estabilidad de una bóveda sin que sea preciso determinar por completo la curva de presión y sencillamente por medio de un trazado hecho á mano.

En efecto; supongamos conocido el punto de rotura D en la bóveda que representa la figura 126; tírese por este punto la tangente al intrados, la cual corta al estribo en el punto S. Como la curva de presión debe encontrarse por bajo de la tangente, resulta evidente que limitando la altura del estribo en S, el macizo se hallará en equilibrio. También subsistirá este equilibrio aunque se prolongase el estribo hasta EF, con tal de ensanchar la parte baja, de modo que contenga la tangente en su espesor. Pero como este ensanche podría dar lugar á un notable aumento de fábrica, será útil precisar más el resultado, determinando el punto de encuentro K de la curva de presión con la base EF.

Para esto se trazarán las verticales que pasan por los centros de gravedad de las superficies ABDC, ABFE; sobre ellas se llevarán las longitudes st y S′T, respectivamente

proporcionales á los pesos de dichas superficies; la horizontal *tn*, hasta la tangente, dará la longitud representativa del empuje, longitud que se señalará sobre la horizontal de T en TN; la recta S'N corta á la base del estribo en el punto K que se busca. La curva que pasa por los tres puntos M, D, K, y que puede trazarse á mano, dará suficiente idea de las condiciones de estabilidad del macizo, permitiendo fijar de un modo bastante aproximado el ensanche que exige el estribo en su parte inferior.

Hemos demostrado que la curva de presión de una semibóveda pasa siempre por un punto de intrados, llamado impropiamente punto de rotura, puesto que la rotura se verifica en la extremidad opuesta de la junta; más exacto será denominarlo punto de giro ó punto *charnela*. Vimos también que en una bóveda circular rebajada se hallaba este punto en los arranques, mientras que para una bóveda de medio punto ó carpanel, estaba situado hacia la mitad de la altura de la flecha. Pero además de estos puntos charnelas, indispensables en esta clase de construcciones, pueden existir otros accidentales motivados por la insuficiencia de dimensiones de la bóveda ó de sus partes accesorias.

Así, por ejemplo, si el ancho del estribo, representado en la misma figura 126, es inferior á la distancia KF, es decir, si la curva de presión, que hemos trazado, sale del espesor del pie derecho, el equilibrio no podrá subsistir; este macizo será derribado hacia fuera, girando alrededor de la arista exterior de su base, y al propio tiempo la bóveda caerá en el interior.

258. Las bóvedas peraltadas ofrecen también ejemplos de puntos charnelas que se hallan en el trasdos, pero por encima de la junta de rotura. Tracemos la curva de presión en la bóveda peraltada de la figura 127, curva que pasa por el punto D, situado en el intrados de arranques, y por un punto M de la junta del vértice. Señálase para esto la vertical del centro de gravedad de la bóveda ABDC y la horizontal del punto M; uniendo el punto S en que se encuentran estas dos líneas, con el punto D, obtendremos la posición de la resultante del

empuje y del peso de la bóveda. Si representamos este peso por SP, la longitud DP dará, en la misma escala, el valor del empuje; partiendo de este valor y dividiendo la bóveda en cierto número de dovelas, obtendremos una serie de puntos de la curva de presión $MlkD$.

Pero podrá suceder que esta curva corte al trasdos en dos puntos k y l; indica esto que no es posible el equilibrio; la parte superior giraría alrededor de un punto situado entre k y l, y al mismo tiempo la inferior verificaría el movimiento alrededor de D. No puede entonces admitirse semejante sección de bóveda, y forzosamente sería necesario modificar su perfil, de manera que la curva de presión no salga de su espesor.

Consideremos el caso en que esta curva no hace más que aproximarse al trasdos; si la separación es inferior al tercio de la longitud de la junta, según la ley del trapecio, el contacto no tendrá lugar sobre toda esta longitud, y la junta se abrirá más ó menos en el intrados, cerrándose en el trasdos en E. De aquí resulta que el desarrollo de intrados tiende á aumentar, el de trasdos á disminuir, y como consecuencia, la presión en la junta del vértice tiene más intensidad en B que en A. En esta clase de bóvedas el punto de aplicación del empuje se encuentra generalmente por bajo del punto medio de la clave.

Es evidente que á consecuencia del movimiento que ocasiona la abertura de la junta EF en el intrados, tiende la clave á subir. En general se reconoce esta tendencia al levantamiento, cuando la curva de presión se aproxima hacia el punto E del trasdos á una distancia menor que el tercio de la longitud de la junta.

259. Hemos estudiado hasta ahora el equilibrio de las bóvedas sin tener en cuenta las sobrecargas susceptibles de actuar sobre ellas; pero es sabido que las bóvedas de los puentes deben sostener pesos fijos tales como las procedentes del relleno de tímpanos y de la vía, así como también otros móviles producidos por los vehículos de transporte. Conviene hacerse cargo de la influencia ejercida por estos pesos en la estabilidad de la construcción.

Consideremos en primer lugar una bóveda incompleta, ó rebajada en arco de círculo, cuyo aparejo en dovelas tiene por trasdos la línea ACF (fig. 128). Partiendo de M, que tomaremos en medio de la junta AB del vértice y del punto de giro D, se hará el trazado de la curva de presión M*m*D, que se prolonga en el interior del estribo DCFEL hasta su encuentro en N con la base EL. Supongamos ahora que la bóveda recibe el peso del macizo ACFTU; si este macizo se compone de tierra, se empezará por reducir las verticales comprendidas entre las dos líneas ACF y AUT en la relación existente entre la densidad de la tierra y la de la mampostería, y esto dará lugar á una nueva línea AU'T' tal, que la sección ACFT'U' pueda considerarse como perteneciente á un macizo de igual densidad que la fábrica y con el mismo peso de la sobrecarga.

Es difícil conocer exactamente el modo de actuar esta sobrecarga sobre la bóveda. La hipótesis admitida como más racional, consiste en suponer que cada dovela recibe el peso de la parte de macizo situada encima, parte limitada por las dos verticales que pasan por los extremos superiores de las dos juntas. Se admite todavía, siguiendo el mismo principio, que en el instante de la rotación de la bóveda alrededor del punto D, la sobrecarga se abre según la línea CU próximamente vertical; de modo que el trozo AUC actúa sobre la bóveda, y el resto UTFC sobre el estribo. Podrá, pues, considerarse la bóveda como terminada por arriba con la línea AU, y subdividida en partes formadas por las dovelas aumentada cada una con la faja vertical que tiene encima. Si partiendo del mismo punto M de empuje en la clave y del de rotura D, se traza hasta la base del estribo la nueva curva de presión, contando con el peso del macizo T'U'CF, se obtendrá la línea M*m'*DN'.

Adviértase que esta nueva curva es menos aplastada que la que corresponde á la bóveda sin sobrecarga, es decir, que la última se ha doblado en la parte superior, alejándose de la arista exterior en su encuentro N' con la base. Esto indica que el macizo reune mejores condiciones de resistencia, es

decir, que la estabilidad ha aumentado con la sobrecarga. Así puede suceder en los puentes; los estribos, calculados para resistir al empuje de la bóveda, se encuentran consolidados con la adición del relleno de los senos, siempre que el macizo adicional tenga su centro de gravedad á una distancia suficiente del centro de la bóveda; pero no sucede lo mismo cuando es pequeña la separación de los dos centros, según puede acontecer con la carga móvil. Conviene, pues, examinar lo que se verifica en los diversos casos.

260. Debe existir en la parte superior del macizo un punto que lo divida en dos regiones tales, que todo peso colocado en la de la izquierda aumente la estabilidad. La línea divisoria de estas dos regiones puede fijarse por medio de los siguientes razonamientos, debidos á los dos ingenieros ya mencionados, *MM. Lamé* y *Clapeyron*.

Tomemos la misma bóveda circular rebajada de la figura 128, y designemos por

P, el peso de la semibóveda ABDC, sin sobrecarga;
Q, el empuje de esta semibóveda en la clave;
P′, el peso del estribo CFELD;
π, un peso adicional que supondremos colocado en K;
Q′, el empuje en la clave de la semibóveda con el peso adicional;
l, el brazo de palanca del peso P con respecto á D;
k, el brazo de palanca del empuje Q;
H, la altura de arranques DL;
s, la distancia NL;
s', la distancia del centro de gravedad del estribo á la vertical de N;
n, la distancia DJ ó el brazo de palanca del peso π.

Se tendrá para el valor del empuje Q

$$Q = \frac{Pl}{k},$$

y la ecuación de equilibrio, sin sobrecarga, con respecto á N, será

$$Q(H + k) = P(l + s) + P's',$$

y reemplazando Q por su anterior valor, resulta

$$\frac{Pl}{k}(H + k) = P(l + s) + P's' \qquad [a]$$

Atendiendo ahora á la sobrecarga π, tendremos una nueva presión

$$Q' = \frac{Pl + \pi n}{k},$$

presión que ha recibido un aumento $\frac{\pi n}{k}$ sobre la primera. El equilibrio referido á N da lugar á la ecuación

$$Q'(H + k) = P(l + s) + P's' + \pi(n + s),$$

y reemplazando Q' por su valor, se halla

$$\frac{Pl + \pi n}{k}(H + k) = P(l + s) + P's' + \pi(n + s). \qquad [b]$$

Comparando las dos ecuaciones [a] y [b], se ve que el peso adicional ha hecho aumentar el momento del empuje en la cantidad $\frac{\pi n}{k}(H + k)$, y el de la resistencia en $\pi(n + s)$. Siempre que estos dos aumentos sean iguales será nula la influencia del peso sobre el equilibrio, debiendo entonces verificarse

$$\frac{\pi n}{k}(H + k) = \pi(n + s),$$

de donde se deduce

$$\frac{n}{s} = \frac{k}{H}.$$

Indica este resultado que los tres puntos N, D y K, han de estar en línea recta,

La diferencia entre los aumentos que han sufrido los momentos del peso de la bóveda y del empuje, tiene por valor

$$\pi \left(s - \frac{nH}{k} \right),$$

y será tanto mayor, cuanto más pequeña sea la distancia n del peso adicional á la vertical del punto D. La máxima diferencia corresponde á $n = 0$; por lo tanto, cuando el peso π coincide con dicha vertical, se obtiene la posición más favorable para la estabilidad.

Haciendo $n > \frac{sk}{H}$, resulta negativa la diferencia; en este caso el peso adicional, situado á la derecha del punto K, que podemos llamar *punto neutro*, habrá ocasionado una disminución de estabilidad en el macizo. El equilibrio subsistirá, sin embargo, con tal que el punto N no salga del espesor del estribo.

Podrá también el peso π encontrarse á la izquierda de la vertical que pasa por el punto de rotura. Entonces este peso no influye en nada sobre el empuje de la bóveda, puesto que se admite que durante la rotación se verifica la abertura según esta vertical, poco más ó menos; pero aumentará la resistencia del estribo, ó sea su momento, en una cantidad que, cambiando el signo de n, se convierte en

$$\pi (s - n).$$

El mayor aumento de resistencia corresponderá siempre á $n = 0$.

Vemos, pues, que todo peso adicional, cuyo centro de gravedad se halla sobre la vertical del punto neutro K, punto que se determina por el encuentro de la horizontal del empuje con la línea que une los puntos de rotura D y de paso N en la base, no altera las condiciones de equilibrio del macizo. Si el peso se sitúa á la derecha del punto neutro, es decir, hacia

el centro de la bóveda, habrá disminución de estabilidad; por el contrario, aumentará ésta cuando se encuentre el peso del lado opuesto ó hacia el estribo; en este caso, el máximo aumento corresponderá á la posición que coincide con la vertical del punto de rotura.

A medida que el peso adicional se separa del punto neutro K, alejándose del centro de la bóveda, la curva de presión en su parte inferior se separa también del paramento del estribo que se halla en contacto con el terraplén; en esta misma parte inferior se aplasta la curva, y por el contrario, se dobla en los riñones. Inversamente sucede cuando el peso adicional se acerca al centro de la bóveda.

Las consideraciones que preceden suponen implícitamente que el peso adicional actúa simétricamente en las dos semibóvedas, es decir, que existen dos pesos iguales situados á igual distancia del eje. Todas las curvas de presión relativas á las distintas posiciones de los dos pesos son también simétricas con respecto á este eje, lo cual no sucedería si el peso obrase de un solo lado.

261. Pueden deducirse de lo que antecede las siguientes consecuencias:

1.ª Si después de haber calculado el grueso necesario para los estribos de una bóveda trasdosada de igual espesor, á fin de obtener cierta estabilidad, rehacemos los cálculos, admitiendo que la bóveda sostiene la carga de fábrica que suele establecerse en los riñones, hallaremos aumento en dicha estabilidad y, en efecto, con esta operación se habrá añadido un peso adicional, cuyo centro de gravedad se encuentra á mayor distancia del eje de la bóveda que el punto neutro.

2.ª El terraplén destinado á formar la rasante superior de la vía en los puentes, modificará en general las condiciones de resistencia al giro. Para poder apreciar estas modificaciones, hay que empezar por dividir el terraplén en dos partes separadas por la vertical CU, que pasa por el trasdos de la junta de rotura; el volumen CUTF, situado sobre el estribo, ninguna influencia ejerce en el empuje, ni en el trazado de la parte supe-

rior $Mm'D$ de la curva de presión, pero aumenta el peso del estribo y la estabilidad; hay que tenerlo, pues, en cuenta para fijar la parte inferior DN' de esta misma curva. El otro volumen ACU del terraplén hace crecer evidentemente el empuje de la bóveda, y tenderá al aumento ó á la disminución de estabilidad, según que su centro de gravedad se encuentre á mayor ó menor distancia del eje de la bóveda que el punto neutro K. El trazado de la curva $Mm'D$ se hará, según dijimos, suponiendo que cada dovela, además de su peso, sufre el de la faja de terraplén situada encima. Completando el trazado de esta curva hasta la base EL del estribo, se podrán apreciar las nuevas condiciones de estabilidad del conjunto de la obra.

3.ª Todo peso en movimiento sobre una bóveda, tal como el peso de un vehículo cargado, produce sobre la curva de presión una serie de oscilaciones que tienen tanta mayor amplitud, cuanto más considerable es este peso con respecto al de la bóveda. Exige el equilibrio que dichas oscilaciones no puedan salir nunca de la misma, y esta condición motiva el exceso de espesor que se le da en la práctica.

262. El estudio anteriormente hecho, relativo á las modificaciones que introduce un peso adicional en el equilibrio del macizo, se refiere á una bóveda incompleta ó circular rebajada. En esta clase de bóvedas, la sobrecarga no altera la posición de la junta de rotura, que siempre está colocada en los arranques; pero no sucede lo propio con las bóvedas completas, ya sean de medio punto, ya carpanelas ó elípticas, de las que vamos á tratar.

Consideremos una bóveda de medio punto con su estribo ABTSL (fig. 129); si aplicando el procedimiento que conocemos se determina la posición del punto de rotura D, de modo que la tangente en este punto corte á la horizontal del empuje en el mismo sitio que la vertical del centro de gravedad de la superficie ABDC, podremos trazar la curva de presión MDN, la cual pasa por el punto D y por M, tomado este último, por ejemplo, en el medio de la longitud AB. Supongamos ahora que sobre el trasdos de la semibóveda ABDC,

y en coincidencia con la vertical de su centro de gravedad, se coloca un peso π, no por esto habrá cambiado el punto charnela; la tangente de intrados será la misma y cortará á la horizontal del empuje en el mismo punto. Pero si el peso π se encuentra á la izquierda de la vertical, el centro de gravedad del conjunto formado por dicho peso y por el de la semibóveda se habrá alejado del eje ó de la clave, y la nueva tangente tendrá otro punto de contacto D' más bajo que el primitivo D. Con este motivo resulta una nueva curva de presión MD'N', y la recta que une los dos puntos N' y D' cortará á la horizontal de M en el punto neutro K. Si, por el contrario, se sitúa el peso π á la derecha del centro de gravedad de la superficie ABDC, el nuevo punto de rotura se hallará por encima de D.

En uno, como en otro caso, después de fijar la posición del punto neutro, podrán aplicarse los anteriores razonamientos, relativos á las modificaciones que experimenta la estabilidad del macizo al variar la posición de la sobrecarga, así como al máximo aumento de esta misma estabilidad; solo que en las bóvedas completas, y por causa de la modificación del punto de rotura, los resultados no se deducen tan inmediatamente, y esto podrá exigir un ligero tanteo, aunque sin importancia para las aplicaciones.

Lo mismo en las bóvedas completas que en las circulares rebajadas, cuando se trate de trazar la parte superior MD' de la curva de presión, no habrá que tener en cuenta la porción de sobrecarga situada á la izquierda de la vertical que pasa por el punto de rotura, ya esté formada dicha sobrecarga por un macizo de fábrica, ya se componga de un terraplén de cierta extensión; pero sí será necesario atender á esta porción de la izquierda al fijar la parte inferior de la misma curva.

Cuanto hemos dicho en el ejemplo que precede sobre una bóveda de medio punto, es aplicable á una bóveda rebajada de forma carpanel ó elíptica.

263. Consideremos ahora una bóveda ojival (fig. 130), es decir, una bóveda cuyo intrados está formado por dos arcos de círculo que se cortan en la clave bajo un ángulo más ó menos

abierto. Supondremos al mismo tiempo que esta bóveda es completa, es decir, que tiene verticales las tangentes en los arranques; como consecuencia de esta hipótesis, los centros de estos arcos estarán situados en la horizontal de dichos arranques.

Hemos visto que en esta clase de bóvedas el punto de aplicación del empuje en la clave se hallaba más próximo al intrados que al trasdos; colocándolo en M al tercio de AB, nos pondremos en condiciones muy usuales. Será luego fácil determinar la situación del punto de rotura en el intrados, valiéndose del procedimiento de la curva de error (**256**); la tangente en el punto charnela debe cortar siempre á la horizontal del empuje en el mismo sitio que la vertical del centro de gravedad de la bóveda ABDC; pero debemos advertir que en las bóvedas ojivales el punto de rotura se halla poco más ó menos á la altura del tercio inferior de la flecha, es decir, más bajo que en las bóvedas de medio punto y carpaneles; atendiendo, pues, á esta circunstancia, se elegirán convenientemente los puntos arbitrarios del intrados entre los cuales ha de estar comprendida la charnela.

Después de haber determinado este último punto, podrá obtenerse sin dificultad la intensidad del empuje, y luego efectuar el trazado de la curva de presión MDN, con más ó menos exactitud, según el número de subdivisiones señaladas en la bóveda. Se observará entonces que esta curva se aproxima al intrados de los arranques mucho más que en las demás formas de sección; lo mismo sucede con su prolongación hasta la base del estribo, lo cual indica menor tendencia al giro, y por lo tanto, que puede contrarrestarse este movimiento con un muro de espesor más reducido. Además, se asegurará sin inconveniente la imposibilidad real de giro tomando como punto de empuje en la clave el B de intrados, y así se obtiene un nuevo punto charnela un poco más alto que el correspondiente á M, y una nueva curva de presión que difiere poco de la anteior.

Según se dijo, el vértice de las bóvedas ojivales presenta

cierta tendencia al levantamiento, y se conoce esta tendencia por la mayor ó menor aproximación de la curva de presión hacia un punto E del trasdos, en donde puede formarse una nueva charnela; es, pues, necesario asegurarse de la estabilidad de la parte superior de bóveda con respecto al giro exterior. Aun cuando el trazado de la curva que arranca de M indique para el macizo buenas condiciones de resistencia, podría muy bien suceder que, por efecto de un vicio de construcción, el punto de aplicación del empuje se acercara á A; así, por ejemplo, hallándose abierta en el intrados la junta de la clave después de sentada, y si con la operación del descimbramiento no hubiese quedado cerrada por completo, el punto de aplicación del empuje podría encontrarse muy próximo al trasdos; entonces el trazado de la curva de presión, partiendo del punto A, se saldría del espesor del macizo, é indicaría el giro de la parte superior de la bóveda hacia el exterior y la caída de la parte inferior hacia dentro.

En la mayoría de los casos la bóveda será estable, pues el punto de aplicación del empuje se halla más bien debajo que encima del medio de la junta; únicamente á consecuencia de un defecto de construcción, según hemos dicho, es como podría este punto acercarse al trasdos y ocasionar la ruina de la obra. Puede prevenirse este accidente aumentando el espesor de la parte superior, de manera que la curva de presión no salga del interior de la fábrica, y también ensanchando la junta de clave desde el trasdos hasta cierta distancia, por ejemplo, hasta la mitad de su ancho.

El estudio de las modificaciones que las sobrecargas introducen en la estabilidad de las bóvedas ojivales, se hará de una manera análoga á lo que hemos indicado para las de medio punto.

264. Terminaremos el examen de las bóvedas simétricas con las adinteladas, cuyo intrados es rectilíneo y horizontal.

Pueden considerarse estas bóvedas como un caso particular de las circulares rebajadas; por lo tanto, los puntos de rotura se hallan en el intrados de las juntas de arranques, y dan lugar

al máximo empuje. Al descimbrar desciende el punto B (figura 131) una pequeña cantidad, y la junta que le corresponde tiende á abrirse en el intrados, donde es nula la presión; indica esto que el punto de aplicación M del empuje debe hallarse á una distancia AM igual á lo más al tercio de AB. Tomando el tercio, nos colocamos en las mejores condiciones de resistencia, puesto que el brazo de palanca del empuje es un mínimo, y por lo tanto, el empuje adquiere un valor máximo.

Las juntas de un dintel deben trazarse normalmente á la curva de presión; pero según *Coulomb*, se necesita para esto que sigan las direcciones de los radios de un mismo círculo. En efecto; consideremos una punta cualquiera EF, y sea N su punto de encuentro con la curva de presión; la resultante SN del empuje y del peso de la bóveda deberá cortar á la horizontal de M en el mismo punto que la vertical del centro de gravedad de la superficie ABFE. Los dos lados NT y TS del triángulo rectángulo SNT serán respectivamente proporcionales á las dos fuerzas componentes, así como la hipotenusa lo será también á la resultante; y si designamos por p el peso de ABFE, se tiene

$$\frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TS}} = \frac{\mathrm{Q}}{p};$$

pero puesto que la resultante NS debe ser normal á la junta EF, los dos triángulos NST y FBO tendrán los lados perpendiculares, y serán, por lo tanto, semejantes. Haciendo $\mathrm{BF} = x$, podremos establecer

$$\frac{\mathrm{BO}}{x} = \frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TS}} = \frac{\mathrm{Q}}{p} \quad \text{ó} \quad \mathrm{BO} = \mathrm{Q} \times \frac{x}{p}.$$

Pero el peso p es proporcional á la superficie ABFE, y ésta varía como x ó como BF; por lo tanto, la relación $\frac{x}{p}$ es

constante, y lo mismo sucede con BO, es decir, que dicha longitud no varía cuando se cambia la posición de F sobre la horizontal BD. Queda, pues, demostrado que todas las juntas concurren al mismo punto O situado en el eje de la bóveda.

Para hallar la posición de este punto, admitiremos que la bóveda termina en los arranques con juntas verticales, lo cual no da lugar á ningun error de importancia en la práctica; si además tomamos el punto S′ en medio de la longitud de la semiluz, las rectas S′T′ y T′D′ serán respectivamente proporcionales al peso P de la semibóveda y al empuje Q. Llamemos a la semiluz BD′, é y la flecha BM; resultará

$$\frac{S'T'}{T'D'} = \frac{P}{Q} = \frac{y}{\frac{a}{2}} \quad \text{ó} \quad Q = \frac{Pa}{2y};$$

tenemos también

$$\frac{x}{p} = \frac{a}{P};$$

por lo tanto, sustituyendo en la expresión de BO los valores de Q y de $\frac{x}{p}$, se obtiene

$$BO = \frac{Pa}{2y} \times \frac{a}{P} = \frac{a^2}{2y};$$

es decir, que la semiluz a es media proporcional entre BO y el duplo de la flecha; podrá, pues, determinarse gráficamente la longitud BO llevando sobre el eje, BB′ $= 2BM = 2y$, y haciendo pasar un arco de círculo por los tres puntos B′, D, D′; cortará este arco al eje en el punto O.

Adviértase que los dos triángulos semejantes S′T′D′ y BD′O, dan

$$\frac{S'T'}{T'D'} = \frac{BD'}{BO},$$

y como se verifica

$$\frac{S'T'}{T'D'} = \frac{P}{Q},$$

resulta

$$\frac{BD'}{BO} = \frac{P}{Q},$$

lo que hace ver que, considerando BD' como proporcional al peso P de la semibóveda, entonces BO representará, en la misma escala, el valor del empuje Q.

265. Puede igualmente obtenerse el punto de concurso de las juntas pertenecientes á las dovelas por medio de otro procedimiento, que aunque menos exacto, es suficientemente aproximado en la práctica. Se reduce á hacer pasar una circunferencia de círculo por los tres puntos D, M, D'. Sea O' el nuevo centro, y R el radio O'D', se tiene

$$\overline{O'D'}^2 = \overline{O'B}^2 + \overline{BD'}^2 \quad \text{ó} \quad R^2 = (R - y)^2 + a^2,$$

de donde se deduce

$$R = \frac{a^2}{2y} + \frac{y}{2};$$

esto demuestra que el nuevo centro O' solo se encuentra á una distancia $\frac{y}{2}$. del centro O hallado antes.

Puede, pues, establecerse como regla práctica, que en un dintel las juntas normales á la resultante de las presiones se confunden con los radios de una circunferencia que pasa por los arranques y por el punto de aplicación del empuje. Si se adopta un radio más corto se obtienen ángulos de dovela más agudos, sin utilidad para la estabilidad de la bóveda; tomando, por el contrario, un radio mayor, las dovelas presentan tendencia al resbalamiento.

Cuando sobre toda la extensión de la bóveda se dispone una carga uniformemente distribuída, no se modifica por esto

el trazado de las juntas, puesto que la relación $\frac{Q}{P}$ no se altera. La presión en cada punto sufre un aumento, pero sin cambiar su dirección. En el caso en que la distribución de la sobrecarga no sea uniforme, podrá fácilmente estudiarse la influencia ejercida en la estabilidad del dintel.

266. Ocupémonos ahora de las bóvedas cuyo intrados no es simétrico, como por ejemplo, la que indica la figura 132. Supongámosla dividida en dos porciones desiguales ABFE , ABF′E′, por medio de la vertical del punto B , en donde la tangente es horizontal. La gran semibóveda de la izquierda, tomada aisladamente, exige para su equilibrio la aplicación en M de un empuje horizontal Q , susceptible de considerarse como procedente de otra semibóveda igual y simétrica; presentará en el intrados un punto de rotura D , y se podrá efectuar como siempre el trazado de la curva de presión. Así, pues, se verifica en la gran semibóveda lo mismo que si perteneciera á una bóveda completa simétrica; pero en atención á que en todo el macizo no actúan más que fuerzas verticales, las reacciones horizontales en M deben hacerse equilibrio; por lo tanto, la pequeña bóveda ABF′E′ de la derecha estará sometida en M á un esfuerzo horizontal igual á Q. Pero este esfuerzo es evidentemente superior al empuje Q′ que se desarrollaría espontáneamente si la pequeña semibóveda estuviera contrarrestada por otra mitad completamente igual; resulta, pues, que si partiendo de M y con el empuje Q se traza la curva de presión MN′, se separará ésta del intrados, en donde no existirá ningún punto de rotura, avanzará dicha curva más ó menos en el interior de la fábrica y acaso se salga del trasdos, dando lugar á la ruina del macizo. De todos modos, en esta clase de bóvedas puede efectuarse el trazado de la curva de presión con la misma facilidad que en las simétricas, puesto que en cuanto se hayan determinado el punto de rotura y la intensidad del empuje relativos á la semibóveda mayor, se tienen los datos necesarios para fijar esta curva en toda su extensión.

Conviene observar que siendo el empuje Q de la semibó-

veda de la izquierda superior al que correspondería á la otra mitad menor, la junta AB de la clave, y al revés de lo que sucede con las bóvedas simétricas, tiende á perder la verticalidad y á seguir el movimiento de la bóveda pequeña hacia el exterior. Resulta de aqui que la presión aumenta en B y disminuye en A, lo cual motiva el descenso del empuje hacia el primero de estos dos puntos. Será, pues, prudente verificar las condiciones de equilibrio de la semibóveda menor con su estribo, tomando el punto B como el de aplicación del empuje en la clave.

Los arcos por tranquil, cuyos arranques se encuentran á distintas alturas, constituyen un caso particular de las bóvedas que no son simétricas. Se dividirán en dos partes por medio de la junta AB relativa al punto de intrados, cuya tangente es horizontal (fig. 133), y se determinará luego el punto de rotura y el empuje horizontal para el arco de la izquierda, deduciéndose fácilmente el trazado completo de la curva de presión. El procedimiento es aplicable á toda forma de bóvedas y á toda clase de inclinación.

Aunque una bóveda sea simétrica, si no está cargada por igual en ambos lados, se obtendrán resultados análogos á los hallados para las bóvedas que carecen de simetría; por lo tanto, la curva de presión se separará del intrados en la semibóveda de menor carga y acaso se salga del trasdos.

Se empieza por determinar el punto de rotura, que estará situado algo más bajo que en los casos ordinarios, pues la sobrecarga aleja del eje el centro de gravedad del macizo ABDL (fig. 134), y motiva una mayor inclinación para la tangente en D. La indagación de este punto dará lugar á un pequeño tanteo; será después fácil hallar la intensidad del empuje Q y verificar el trazado de la curva MDN, que presentará un garrote en E por causa de ser discontinua la carga. Valiéndose del empuje Q, se determinará la curva ME′N′ de la derecha, curva que ha de componerse de una parte superior ME′, evidentemente simétrica de ME, y de la parte inferior E′N′, que alejándose del intrados, exigirá determinar con más

cuidado el espesor de estribo necesario para oponerse al giro hacia fuera.

Por el lado de la mayor carga, la curva de presión encuentra á la base en un punto N situado á gran proximidad del intrados, lo cual demuestra que puede suplirse una falta de espesor en el estribo mediante un aumento de peso sobre los riñones de la bóveda.

267. *Conjunto de varias bóvedas.*—Vamos á examinar las condiciones de estabilidad de algunas agrupaciones de bóvedas reseñadas en la obra de M. Dupuit.

Es evidente que si dos bóvedas contiguas son completamente iguales, las curvas de presión serán simétricas, y en la pila que separa las dos bóvedas se reducirá esta curva á una recta vertical pasando por el medio.

Pero no sucede lo mismo cuando los arcos son distintos, como en la figura 135, en la que suponemos que los arranques se encuentran á un mismo nivel. Considérese aisladamente la bóveda mayor con su pila, y después de determinar el empuje Q, tracemos la curva de presión MDN; si ésta corta al paramento D′S por encima de la base, quedará indicado que la pila no tiene el suficiente grueso para contrarrestar por sí sola al empuje. Pero se concibe que la existencia de la pequeña bóveda modificará este defecto de estabilidad. Tracemos en esta última la curva de presión D′M′D″N′ procedente de su empuje propio Q′ y que supondremos hallarse contenida en el espesor del estribo; combinando los dos empujes Q y Q′, con el peso de las dos semibóvedas y el de la pila, obtendremos en ésta una nueva curva, que podrá también estar comprendida en su interior, y por lo tanto, cortará á la base entre los puntos S y T. En este caso subsiste el equilibrio, y no será necesario cambiar nada en las disposiciones del conjunto del macizo.

Pero podría suceder que la curva saliese del pilar por encima de la base; indicaría esto que el empuje Q′ de la bóveda pequeña no es suficiente y que es preciso atribuirle un mayor valor Q_2 tal, que por lo menos haga pasar la curva por la arista inferior S.

Para calcular este valor de Q_2, designaremos por
P, el peso de la semibóveda mayor;
P′, el peso de la semibóveda menor;
p, el peso de la pila que las separa;
h, la altura de arranques sobre la base;
e, el espesor de la pila.
Tomando los momentos con respecto á S, podremos establecer la siguiente ecuación de equilibrio:

$$Qh = Q_2 h + Pe + p\,\frac{e}{2} \qquad ó \qquad Q_2 = Q - \left(P + \frac{p}{2}\right)\frac{e}{h}.$$

Suponen estas ecuaciones que P y Q actúan en D, y P′ y Q_2 en D′; se advertirá además, que el momento de P′ respecto á S, es nulo. Con este valor de Q_2 y partiendo del punto D′ se trazará la curva D′M′D″N′, la cual debe hallarse contenida en el espesor del macizo.

Puede también suceder que el vértice M′ de esta curva caiga debajo del vértice B′ de intrados, y esto sería inadmisible para el equilibrio. Semejante resultado no debe sorprender, pues el empuje de la bóveda mayor tiende á cerrar la junta D′C, es decir, á subir el punto de aplicación de la resultante en esta junta y á bajar el punto M′. Para hacernos cargo de este efecto, adoptaremos las siguientes nuevas denominaciones:
$2a$, luz de la bóveda pequeña;
y, altura del vértice de la curva de presión sobre los arranques.

Estableciendo la ecuación de equilibrio con respecto á D′, se obtiene

$$Q_2\, y = P'\,\frac{a}{2} \qquad ó \qquad y = \frac{P'a}{2Q_2};$$

se supone además que el centro de gravedad de la semibóveda se encuentra sobre la vertical que divide la semiluz en dos partes iguales; el error cometido con esta hipótesis es de escasa importancia. Vemos, pues, que y disminuye á medida que Q_2 tiene mayor intensidad, y podría verificarse que el vértice

de la curva de presión descendiera por bajo del vértice del intrados.

Entonces habría que rehacer el trazado de esta curva, partiendo de un punto de la junta D'C más elevado que la extremidad D'. Si tomando aun como punto de partida la extremidad opuesta C, situada en el trasdos, la nueva curva saliese del perfil de la bóveda pequeña, debería modificarse forzosamente la disposición de esta bóveda dándole menos flecha, lo cual demuestra que en semejantes circunstancias las bóvedas muy rebajadas son las que mejor se prestan á transmitir presiones horizontales.

Conviene observar, además, que la disposición indicada en el ejemplo anterior, es decir, admitiendo que la curva MDS pasa por una arista de la base, debe desecharse, pues es preciso evitar en la práctica el gran esfuerzo unitario que sufriría dicha arista. Aconsejamos en todo caso se disponga el conjunto del macizo de modo que los dos empujes naturales Q y Q', es decir, los empujes que corresponden á cada una de las dos bóvedas tomadas aisladamente, combinadas con sus pesos y el de la pila, produzcan una curva de presión que corte á la base en su medio ó á suficiente distancia de la arista S, para dar lugar á una máxima presión admisible. Se consigue este resultado aumentando el ancho de la pila ó rebajando convenientemente la bóveda pequeña. En algunos casos podrá ser conveniente prescindir por completo del empuje de esta última, fijando las dimensiones del pilar para que resista como estribo de la bóveda grande.

Si las dos bóvedas no tienen sus arranques á un mismo nivel (fig. 136), designando por

H, la altura DT; y por

h, la altura D'S;

tendremos para la ecuación de equilibrio, con respecto á S,

$$QH = Q_2 h + Pe + p\frac{e}{2},$$

de donde se deduce

$$Q_2 = Q \frac{H}{h} - \left(P + \frac{p}{2}\right) \frac{e}{h}.$$

268. Examinemos aún el caso de varias pequeñas bóvedas iguales, puestas á continuación de otra grande, y veamos cómo se trasmite el empuje de una á otra (fig. 137).

Según vimos con el ejemplo que precede, el empuje que debe asignarse á la primera de las bóvedas psqueñas, para hacer equilibrio á la grande, es

$$Q_2 = Q - \left(P + \frac{p}{2}\right) \frac{e}{h};$$

considerando ahora el equilibrio del segundo pilar, hallaremos para el empuje de la segunda bóveda pequeña, que llamaremos Q_3,

$$Q_3 = Q_2 - \left(P' + \frac{p}{2}\right) \frac{e}{h},$$

en la que P' representa el peso de una semibóveda pequeña, igual para todas. Tenemos también para el equilibrio del tercer pilar

$$Q_4 = Q_3 - \left(P' + \frac{p}{2}\right) \frac{e}{h},$$

y así sucesivamente para los demás pilares. Estos valores sucesivos demuestran que el empuje disminuye de una bóveda á la siguiente según una progresión aritmética decreciente, cuya razón es

$$\left(P' + \frac{p}{2}\right) \frac{e}{h}.$$

Sumando estas ecuaciones miembro á miembro, resulta

$$Q_n = Q - \frac{e}{h}\left[\left(P + \frac{p}{2}\right) + (n-2)\left(P' + \frac{p}{2}\right)\right]$$

Igualando á cero el segundo miembro de esta ecuación, obtendremos otra nueva de la que podrá deducirse el valor de n, ó sea el número de bóvedas pequeñas necesarias para hacer equilibrio á la mayor.

El mismo resultado puede conseguirse gráficamente. En el vértice de la primera bóveda pequeña se levantará una vertical de una longitud proporcional á Q_2, y en el vértice de la segunda otra proporcional á Q_3; uniendo las extremidades superiores de estas dos líneas, se obtendrá una recta inclinada, que encontrará á la horizontal EF de los vértices en un punto cuya situación indicará el número de bóvedas necesarias.

Adviértase que aunque sean iguales las bóvedas pequeñas, su empuje va disminuyendo á medida que distan más de la grande; esto da lugar á curvas de presión diferentes para cada una, y cuyas flechas varían en razón inversa del empuje. Es esto evidente, puesto que la flecha constituye el brazo de palanca del empuje, cuyo momento, igual al del peso de la semibóveda, es constante. Se ve también con esto, que de conformidad con lo que admite la teoría de M. Dupuit, pueden realizarse en una misma bóveda una infinidad de curvas de presión, compatibles todas con el equilibrio, pero que solo se producen bajo la influencia de fuerzas exteriores.

El ejemplo que antecede demuestra, que puede contrarrestarse el empuje de una bóveda de cierta magnitud por medio de otras más pequeñas, situadas á continuación de la mayor y separadas por pilares de un ancho insuficiente para resistir como estribos. Este medio no es económico, y solo pueden motivarlo conveniencias arquitectónicas.

Es también posible oponerse al empuje de una bóveda con otra media del mismo radio (fig. 138); en este caso el empuje horizontal es igual por ambos lados, y la curva de presión en la pila intermedia está formada por una recta vertical, lo mismo que sucede cuando la pila sostiene dos bóvedas simétricas. Esta disposición ofrece cierta economía de fábrica, pues reduce la altura del estribo en la magnitud de la flecha, y permite así disminuir el espesor de dicho estribo.

269. *Arcos botareles.*—La teoría de los arcos botareles se funda en lo que antecede; la única diferencia proviene de la discontinuidad de las bóvedas accesorias, en sentido de las generatrices del cilindro. Así es que se determinará el esfuerzo que han de ejercer estos arcos, por medio de la fórmula (**267**)

$$Q_2 = Q \frac{H}{h} - \left(P + \frac{p}{2}\right) \frac{e}{h},$$

en la cual el empuje Q de la bóveda mayor, así como su semipeso P y también el peso p de la pila ó muro, deberán calcularse para una longitud de cilindro igual á la distancia que media entre los ejes de dos arcos botareles sucesivos, en vez de tomar como hasta ahora una longitud de un metro en sentido de las generatrices. Por otra parte, el empuje Q_2 procederá de uno solo de estos arcos de longitud fija, los cuales tienen que disponerse convenientemente en cuanto á su forma, á su número, á su ancho, á su separación y al espesor de sus estribos.

Es decir, que si se designa por a la relación existente entre la longitud de la bóveda de eje á eje de los arcos botareles y la longitud de uno de estos arcos, en sentido de las generatrices del cilindro, tendremos

$$Q_2 = a \left[Q \frac{H}{h} - \left(P + \frac{p}{2}\right) \frac{e}{h}\right],$$

en la que tanto los empujes Q y Q_2, como los pesos P y p, están referidos á la unidad de longitud de los respectivos cilindros.

El trazado de la curva de presión permitirá hacerse cargo de la estabilidad del conjunto.

270. *Bóvedas de cúpula.*—Las bóvedas de revolución, llamadas *cúpulas*, tienen sus secciones meridianas aparejadas del mismo modo que las bóvedas cilíndricas; la subdivisión en dovelas está formada por rectas normales á la curva de intrados, la cual puede ser circular, elíptica ó carpanel. Pero existe una diferencia muy esencial entre estas dos clases de bóvedas; en

las últimas, las superficies de junta de las dovelas se componen de planos limitados por las generatrices de intrados y de trasdos, mientras que en las primeras dichas superficies están formadas por troncos de conos, cuya base mayor circular se halla en el trasdos.

De aquí resulta que una bóveda de cúpula puede estar en equilibrio, sin necesidad de construir hasta la clave la totalidad de las hiladas anulares de que se compone, es decir, que puede dejarse en el vértice un hueco circular mayor ó menor, sin que por esto caiga la bóveda.

En el instante de descimbrar una bóveda que se halle en semejantes condiciones, toda la parte situada por encima de la junta de rotura experimenta un asiento que hace descender la curva de intrados, tanto más, cuando más se acerca al vértice de la cúpula. Por consecuencia de este movimiento, las hiladas de las dovelas formando anillos se comprimen, y por lo tanto, dan lugar á una fuerza tangencial T constante, que puede reemplazarse por otra F, también constante, dirigida en el sentido del radio del anillo, según la fórmula conocida

$$\mathrm{T} = \mathrm{F}r, \qquad \text{ó} \qquad \mathrm{F} = \frac{\mathrm{T}}{r},$$

en la cual r designa dicho radio (**274**).

Esta fuerza, que lo mismo existe en una cúpula completa que en otra abierta en su cúspide, y cuya intensidad varía además, según se considere un círculo de intrados mayor ó menor, puede muy bien hacer oficio de empuje y mantener la bóveda en equilibrio. Para determinar el valor de esta fuerza podría suponerse que la compresión tangencial T en cada hilada varía proporcionalmente á la disminución del desarrollo circular de cada anillo, ó más bien á la disminución de este desarrollo por metro de longitud; por lo tanto, llamando E al coeficiente de elasticidad de la fábrica, puede establecerse

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi r - 2\pi r'}{2\pi r} \times \mathrm{E} = \frac{r - r'}{r} \times \mathrm{E}.$$

En esta fórmula r y r' representan los radios de un mismo círculo de intrados cualquiera, antes y después del asiento. Sustituyendo este valor en la anterior expresión de F, resulta

$$F = \frac{r - r'}{r^2} \times E.$$

La diferencia $r - r'$ decrece de un modo sensiblemente regular desde el vértice hasta el punto de rotura, mientras que, por el contrario, crece r como los radios de las hiladas; con este doble motivo, el valor de F disminuye rápidamente á medida que se considera un anillo más distante del vértice. Si á partir de la vertical del punto de rotura se toman al nivel de cada hilada longitudes horizontales proporcionales al valor de F correspondiente, se obtendrá la curva D*n*C (fig. 139), que hace con la vertical un ángulo más agudo que la recta DC; el empuje de la cúpula estará representado por el area DEC*n*, y pasará por el centro de gravedad de dicha área.

271. Se ve, pues, que el empuje horizontal ya no es constante como en las bóvedas cilíndricas, y varía según la posición de la hilada que se considera; por lo tanto, el trazado de la curva de presión debe hacerse por distinto procedimiento. Para hallar el encuentro de la curva con una junta cualquiera, se determinará no solo el peso de la bóveda superior á esta junta y su centro de gravedad, como para una bóveda cilíndrica, sino también la resultante de los empujes ejercidos por las hiladas situadas por encima, y su punto de aplicación. Estas resultantes están dadas por la parte del área DEC*n* comprendida entre CE y la horizontal de la hilada.

Pero para adoptar este procedimiento es preciso conocer la intensidad y el punto de aplicación del empuje relativo á cada una de las hiladas, y esto sólo podría averiguarse admitiendo para la curva D*n*C ciertas hipótesis, que no habrán de ofrecer muchas garantías de exactitud, en atención á que la verdadera ley de variación del empuje, desde la junta de rotura hasta el vértice, es desconocida.

Con este motivo, en la práctica se acostumbra á calcular la estabilidad de las cúpulas por otro método, que consiste en suponer la bóveda subdividida por planos meridianos en una serie de ingletes opuestos dos á dos, y cuyo equilibrio se determina independientemente de la trabazón que tiene cada uno de ellos con los contiguos, considerando además dos ingletes opuestos como una bóveda de cañón; esta asimilación es tanto más exacta, cuanto menor es el ángulo del inglete. Es evidente que si existe equilibrio con la hipótesis de ser independientes las subdivisiones, con mayor razón existirá teniendo en cuenta la trabazón entre los ingletes. No se encuentra dicha hipótesis completamente conforme con la realidad de los hechos, pero en todo caso no puede más que dar lugar á un exceso de resistencia, lo cual no constituye un gran inconveniente en la práctica.

Para determinar las condiciones de equilibrio de dos husillos opuestos pertenecientes á una cúpula, se procederá de un modo análogo á lo que se tiene indicado para las bóvedas cilíndricas, es decir, que se calculará la intensidad del empuje horizontal suponiéndolo constante, y se trazará luego la curva de presión. Pero al hacer este cálculo y este trazado, deberá tenerse en cuenta el peso de la fábrica comprendida entre el vértice y la junta considerada; es, además, evidente que no deben fijarse los centros de gravedad por la sección meridiana, sino por el volumen real.

Adviértase que el centro de gravedad de un husillo, por causa de la disminución de latitud á medida que la hilada está más próxima al vértice, se halla más distante de la clave que el relativo á una bóveda cilíndrica de igual sección, cuyas generatrices tuviesen la misma longitud; resulta de aquí, que la tangente en el punto de rotura se aproxima más á la verticalidad, y por lo tanto, el mencionado punto se encuentra más bajo en las cúpulas que en las bóvedas cilíndricas.

Teniendo presente la observación que antecede, se tomarán sobre el intrados tres ó cuatro puntos, entre los que se presuma puede hallarse el punto de rotura; las tangentes en estos puntos y las verticales de los centros de gravedad referidos á los

volúmenes de husillo que están por encima, determinarán con sus respectivas intersecciones la curva de error que permitirá hallar el punto de rotura, según explicamos para las bóvedas cilíndricas (**256**). Debe observarse además, con este motivo, que el resultado de la operación depende evidentemente de la posición asignada á la horizontal del empuje en la clave; pero así como hemos dicho que en las bóvedas cilíndricas esta horizontal se encontraba un poco por encima del punto medio del espesor, creemos que tratándose de cúpulas convendrá tomarlo más bien algo por bajo de este medio. Fúndase esta opinión en lo que se ha dicho con respecto al empuje producido por la reacción de las hiladas anulares, cuyo centro de gravedad es ciertamente más bajo que el medio de la clave. Ninguna dificultad debe ofrecer el trazado de la curva de presión; al efecto, se parte del valor constante que resulte para el empuje del husillo, empuje que se calculará en cuanto se haya fijado la posición del punto de rotura y la del centro de gravedad de la bóveda situada por encima.

272. Llamando F al empuje horizontal de la bóveda referido á la unidad de longitud, medida en el sentido de los círculos paralelos; s al desarrollo de un arco de paralelo del husillo, y Q al empuje constante de este husillo, se verificará

$$F = \frac{Q}{s},$$

y como s decrece desde los arranques hasta la clave, resulta que F aumenta á medida que se aproxima al vértice, en donde tomaría un valor infinito, si los husillos estuviesen realmente separados y terminados en arista. Pero no existe en la práctica semejante disposición, y las cúpulas completamente cerradas terminan en la parte superior con un sillar de cierta magnitud que constituye la verdadera clave.

El empuje de un husillo perteneciente á una cúpula de revolución, es inferior al que correspondería á una bóveda cilíndrica de igual intrados y espesor, y cuyas generatrices tuviesen la

misma longitud que el desarrollo del paralelo de arranques; motiva esto el menor peso de la parte de husillo superior al punto de rotura, y la menor distancia que media entre este punto y el centro de gravedad de la misma parte de husillo. Pero en uno como en otro caso, y al tiempo de descimbrar, el macizo superior á la junta de rotura tiende á caer hacia dentro, y al mismo tiempo la parte inferior puede girar al exterior; pero si el husillo pertenece á una cúpula completa, es evidente que este movimiento podrá ocasionar la rotura de la fábrica del tambor que sostiene la bóveda; á dicho movimiento se opondrá hasta cierto grado la cohesión de la mampostería. Se ve, por lo que acabamos de decir, que las bóvedas de cúpula exigen menos espesor de estribo que las cilíndricas análogas. Si este espesor no es suficiente, y si además se han abierto puertas ó ventanas en el tambor ó torre que sustenta la cúpula, es sobre todo á lo largo de las generatrices interrumpidas por estas aberturas, que podrán aparecer grietas verticales como indicio de la escasa resistencia de dicho tambor.

273. En casos semejantes puede impedirse el giro por medio de cinchos de hierro colocados por bajo de la junta de rotura, como se hace con frecuencia. Estos cinchos, que no son aparentes, reemplazan los tirantes empleados en algunas bóvedas cilíndricas, y ofrecen la ventaja de no disminuir en lo más mínimo la elegancia y la ligereza de la construcción. Se concibe que con semejante armazón puede anularse por completo el empuje de la bóveda, la cual actúa entonces sobre el tambor únicamente con su peso.

Para determinar la tensión que sufre el cincho de hierro, recordaremos que hemos establecido (**270** y **272**),

$$T = Fr \qquad \text{y} \qquad F = \frac{Q}{s};$$

por lo tanto, se verifica

$$T = \frac{Qr}{s}.$$

Si se designa, en grados, por β el ángulo del husillo que ha

servido para calcular el empuje constante Q, tenemos

$$s = \frac{\pi r \beta}{180^{\circ}},$$

y por lo tanto,

$$\mathrm{T} = \mathrm{Q} \times \frac{180}{\pi \beta}.$$

Este resultado indica, que admitiendo la hipótesis de la invariabilidad del empuje Q, la tensión T es independiente del radio del círculo paralelo, es decir, la misma, sea cual fuera la altura á que se coloque el cincho. Podrá, pues, situarse al nivel del punto de rotura, ó más bajo.

Las consideraciones que anteceden se refieren á una cúpula cerrada en la clave, pero pueden extenderse al caso en que la bóveda presenta en el vértice un vacío circular, pues nada impide asimilar los dos husillos opuestos y truncados á dos semibóvedas cilíndricas, cuya parte superior omitida se reemplaza por un marco ó bastidor inflexible que evita la caida del macizo. Toda la dificultad consistirá en señalar la altura del empuje horizontal en la última junta de arriba que constituye el contorno del hueco. Puede colocarse algo por bajo del medio de esta junta, ó más bien al tercio inferior, á fin de hallarse en mejores condiciones de resistencia. Partiendo de este punto y del peso de la bóveda, será fácil determinar la posición de la junta de rotura, calcular la intensidad del empuje, y por último, efectuar el trazado de la curva de presión.

Si además de ofrecer un hueco circular, tuviese la cúpula que sostener una *linterna*, se procedería de un modo análogo al que acabamos de explicar, con la única diferencia de tener en cuenta el peso de la parte de linterna correspondiente al ángulo del husillo, peso que constituye una sobrecarga de la bóveda.

274. *Bóvedas de rincón de claustro.*—Estas bóvedas cubren espacios terminados por polígonos, que generalmente son regulares, y están compuestas de varias porciones de bóve-

das cilíndricas cortadas por planos verticales que se unen en el centro del polígono. Pueden considerarse como bóvedas de cúpula en las que se han reemplazado los círculos paralelos por polígonos. Se concibe que es factible determinar las condiciones de equilibrio de estas bóvedas por un método semejante al indicado para las de revolución; la subdivisión en ingletes, por medio de los planos verticales que pasan por las diagonales del polígono, es aún más lógica en este caso.

Sea ABCEIJ (fig. 140), el polígono de arranques que suponemos regular, relativo á una bóveda de rincón de claustro, y consideremos en esta bóveda una sección semejante A′B′C′E′I′J′ situada á una altura cualquiera. Cada uno de los ingletes proyectados, según AOB, BOC, etc., constituye una bóveda cilíndrica, cuyas generatrices van en disminución á medida que se aproximan al centro, y de la que podremos calcular el empuje constante Q según se explicó. Estos empujes actúan sobre los lados del polígono, los comprimen y desarrollan en sentido de los mismos una compresión T susceptible de determinarse.

Designando por β el ángulo AOB de un inglete, los empujes Q trasladados á las extremidades de los lados darán lugar á resultantes D dirigidas en sentido de las diagonales, y cuyo valor es

$$D = 2\,\frac{Q}{2}\cos.\frac{\beta}{2} = Q\cos.\frac{\beta}{2}.$$

Descompóngase cada una de estas resultantes según los lados; se deducirá la compresión longitudinal T de la relación

$$D = 2T\,\mathrm{sen.}\,\frac{\beta}{2} \qquad \text{ó} \qquad T = \frac{D}{2\,\mathrm{sen.}\,\frac{\beta}{2}};$$

sustituyendo el valor de D, resulta

$$T = \frac{Q}{2\,\mathrm{tang.}\,\frac{\beta}{2}}.$$

Si llamamos s la longitud A'B' de uno de los lados del polígono, y r el radio del círculo inscrito, podremos reemplazar en la expresión que antecede $\frac{1}{2 \text{ tang.} \frac{\beta}{2}}$ por $\frac{r}{s}$, y tendremos

$$T = \frac{Qr}{s}.$$

La relación $\frac{1}{2 \text{ tang.} \frac{\beta}{2}} = \frac{r}{s}$ es constante, lo mismo que Q; por lo tanto, la tensión T es invariable.

Adviértase que $\frac{Q}{s}$ constituye el empuje de la bóveda por unidad de longitud de hilada, empuje designado por F; se llega, pues, á la ecuación

$$T = Fr,$$

que es independiente de la magnitud que tiene el ángulo β del husillo. No hicimos más que recordar esta relación al tratar de las bóvedas de cúpula (**270**), pero queda ahora demostrada por las consideraciones expuestas.

Podría también anularse el empuje de una bóveda de rincón de claustro por medio de una armazón de hierro; pero en este caso no habría que contentarse con un simple cincho envolviendo exteriormente la bóveda, pues para conseguir un resultado eficaz, sería preciso disponer la armazón de manera que impidiese la flexión de la fábrica entre las extremidades de cada lado del polígono.

Las bóvedas de rincón de claustro pueden igualmente ofrecer en el vértice una abertura semejante al polígono de arranques, pero es también necesario que cada uno de los lados de la última hilada de arriba sea rígido é inflexible. El aparejo de las bóvedas de revolución hace indeformable á esta hilada, lo cual no acontece con las bóvedas de rincón de claustro, si los lados de la abertura se componen de varias piezas.

275. *Bóvedas de arista.*—Con estas bóvedas pueden también cubrirse espacios terminados por un polígono de un número cualquiera de lado, pero por lo regular es un rectángulo.

Consideremos una bóveda proyectada horizontalmente, según el cuadrado ABCD (fig. 141). Comprende este cuadrado cuatro pilares situados en los ángulos y cuatro porciones de bóvedas cilíndricas, cuya proyección es para cada una un pentágono. La disposición de las generatrices es aquí inversa de la que presentan las bóvedas de rincón de claustro, pues su dirección es perpendicular al lado del polígono que limita cada sector y aumentan de longitud á medida que se acercan á la clave. Se ve, además, que dos sectores opuestos no pueden mantenerse aisladamente en equilibrio, necesitando forzosamente apoyarse sobre los dos sectores contiguos, como una bóveda cilíndrica sobre sus estribos. Resulta de esto, que el empuje se compone y se trasmite á los pilares en sentido de las diagonales. Haremos notar aún otra diferencia esencial entre las bóvedas de rincón de claustro y las de arista: en las primeras, la intersección de dos sectores contiguos da lugar á una arista entrante, mientras que en las segundas es saliente.

La determinación de las condiciones de equilibrio que presenta una bóveda de arista no ofrece dificultad alguna; el mismo procedimiento es siempre aplicable para hallar la posición del punto de rotura en cada uno de los sectores cilíndricos considerados aisladamente; se calculará después la intensidad del empuje horizontal Q que obra paralelamente á los planos de frente, y evidentemente se tendrá para la acción de dos bóvedas contiguas sobre el pilar que las sostiene, una fuerza dirigida según la diagonal, y cuya intensidad es

$$Q\sqrt{2}.$$

Debe advertirse que puesto que las generatrices de cada sector aumentan de longitud yendo hacia arriba, el centro de gravedad de la semibóveda se aproxima al vértice, y por lo tanto, el punto de rotura se ha de encontrar más elevado que

si estas generatrices tuviesen todas igual longitud. Es lo contrario de lo que sucede con las bóvedas de rincón de claustro.

Las bóvedas de arista no se prestan á la consolidación por medio de tirantes ó armazones de hierro; todo el empuje se trasmite á los pilares aislados, que exigen una resistencia bastante grande. Obliga esto en la práctica á limitar la luz de estas bóvedas, y si el espacio que hay que cubrir es de gran extensión, se subdivide en cuadros más pequeños con pilares intermedios. Los empujes iguales y contrarios se anulan en estos pilares, que solo han de resistir al peso de las bóvedas adyacentes; únicamente los pilares ó muros de contorno son los que tienen que oponerse al empuje, y con este motivo, conviene darles mayor grueso.

ESPESOR DE LAS BÓVEDAS

276. La determinación del espesor que debe asignarse á una bóveda, constituye un problema teóricamente insoluble; en la práctica es forzoso contentarse con el empleo de fórmulas empíricas deducidas de la experiencia que ofrecen las construcciones existentes.

Presenta este problema cierta analogía con el que trata de averiguar el grueso que exige un muro, para evitar el aplastamiento de los materiales con su propio peso. La cuestión, considerada bajo este punto de vista, es indeterminada, puesto que al aumentar el espesor se aumenta en la misma proporción el peso y la superficie de la base; por lo tanto, la presión unitaria en la parte inferior es siempre la misma. Pero es evidente que para establecer el muro en buenas condiciones de estabilidad debe atenderse además á otras circunstancias, como por ejemplo, á la acción del viento; de todos modos, no puede darse á la construcción un grueso inferior al que se necesita para ejecutarse en buenas condiciones de esmero, lo cual dependerá de la naturaleza de los materiales empleados.

Lo mismo sucede con las bóvedas, solo que aquí aumentan las dificultades, con motivo de la mayor complicación que en

el problema introducen las condiciones especiales de esta clase de macizo.

Consideremos una bóveda circular (fig. 142), cuyo desarrollo sea tal, que los puntos de rotura se encuentren en los arranques; esta bóveda, que supondremos sometida únicamente al peso de sus materiales, se halla en equilibrio, sea cual fuere su espesor; pero este equilibrio es de la misma naturaleza que el del muro considerado antes, el cual, aunque estable, no puede construirse sin darle un grueso que guarde cierta relación con su altura. Pero admitamos que se coloca un peso accidental π en el punto n de esta bóveda; tómese por origen de coordenadas el punto M de aplicación del empuje en la clave; designaremos por

P, el peso de la semibóveda;
G, la abscisa de su centro de gravedad;
Q, el empuje antes de aplicar el peso accidental;
Q', el empuje cuando obra este peso;
a, la semiluz de la bóveda;
Υ, la ordenada del punto D;
ε, la abscisa del punto n;
p, el peso de la parte de la semibóveda superior á una junta cualquiera;
g, la abscisa del centro de gravedad de esta parte.

Tomando los momentos con respecto á D, antes y después de aplicar el peso π, tendremos

$$Q = \frac{P(a - G)}{\Upsilon},$$

y

$$Q' = \frac{P(a - G)}{\Upsilon} + \frac{\pi(a - \varepsilon)}{\Upsilon}.$$

Como Q' es mayor que Q, resulta que la curva de presión trazada con el empuje Q' será más levantada que la procedente de Q.

Esta curva tiene por ecuación, antes de aplicar el peso π,

$$y = \frac{p}{Q}(x - g),$$

y después, para la parte Mn,

$$y' = \frac{p'}{Q'}(x' - g');$$

las letras acentuadas conservan la misma significación que las letras sin acento. Para una misma abscisa, las cantidades x', p' y g' tendrán respectivamente iguales valores que x, p y g, y podremos establecer

$$\frac{y'}{y} = \frac{Q}{Q'} = \frac{P(a - G)}{P(a - G) + \pi(a - \varepsilon)},$$

y

$$y - y' = y\frac{Q' - Q}{Q'} = y\frac{\pi(a - \varepsilon)}{P(a - G) + \pi(a - \varepsilon)}.$$

La última fracción multiplicada por y solo contiene cantidades constantes, lo cual demuestra que y' es más pequeño que y en una relación invariable. Así, pues, á partir de la clave, las dos curvas se van separando una de otra, pudiendo la nueva salirse del trasdos, si éste se halla poco distante del intrados.

Desde el punto de aplicación del peso adicional hasta los arranques, la nueva curva tiene por ecuación

$$y = \frac{p(x - g) + \pi(x - \varepsilon)}{Q'},$$

puesto que debe introducirse este peso; de aquí se deduce que la relación constante $\frac{y'}{y} = \frac{Q}{Q}$, solo existe en la parte superior de la bóveda; la curva MnD forma garrote en n.

Si el peso adicional π actúa también en la semibóveda de la derecha, la nueva curva será simétrica de un lado y otro; pero no existiendo el peso más que en la izquierda, la curva de la derecha será continua, sin garrote, y conservará hasta los arranques la relación constante $\frac{y'}{y}$. Obsérvase que como la curva discontinua se acerca al trasdos en n, tiende á establecerse allí un punto de giro, cuyo efecto es levantar el vértice de la bóveda y hacer bajar el punto de aplicación del empuje en la clave.

277. Las anteriores consideraciones hacen ver que, hallándose las bóvedas en la práctica forzosamente sometidas á cargas accidentales, cuyo efecto es hacer oscilar en su interior la curva de presión, es imposible construirlas con solo el espesor preciso para el equilibrio matemático, en atención á que en este espesor han de estar contenidas las oscilaciones. El cálculo no permite determinar el grueso necesario, pero suministra algunas indicaciones sobre las circunstancias que motivan su aumento ó disminución: por ejemplo, siendo proporcional á y el valor hallado para la diferencia $y' - y$, valor que mide la amplitud de las oscilaciones, y como además la curva primitiva está siempre contenida dentro del perfil de la bóveda, la máxima variación resultará proporcional á la flecha del arco. Puede, pues, decirse que para asignar la misma estabilidad á dos bóvedas de igual luz, debe darse más grueso á la que tiene mayor flecha.

Este resultado acaso aparezca en contradicción con los principios generalmente admitidos, pues suele considerarse el aumento de flecha como un medio de aumentar la solidez de las bóvedas, medio que por sí solo parece suficiente sin necesidad de adoptar espesores más considerables. Pero no debe perderse de vista que un macizo puede quedar destruído por un defecto de estabilidad ó por el aplastamiento de sus materiales; pero no consideramos ahora más que la estabilidad, y bajo este punto de vista será una bóveda tanto más estable, cuanto menos flecha tenga. Por ejemplo, un dintel será siempre

estable, y la curva de presión no saldrá de su espesor por pequeño que éste sea y con cualquier peso accidental colocado sobre su perfil; pues según hemos visto, este peso aplana la curva, la cual nunca puede cortar al trasdos horizontal de la bóveda.

El valor anterior de $y - y'$ puede ponerse bajo la forma siguiente:

$$y - y' = y \frac{1}{\frac{P(a - G)}{\pi(a - \varepsilon)} + 1},$$

lo cual indica que la variación $y - y'$ de la curva de presión disminuye á medida que aumenta la relación $\frac{P}{\pi}$, es decir, tanto más, cuanto mayor es el peso de la bóveda con respecto al peso adicional. Adviértase también que esta variación depende asimismo del valor de ε, es decir, de la distancia de π al eje de la bóveda, resultando de esto que una sobrecarga móvil produce oscilaciones en la curva de presión.

En resumen, el espesor de una bóveda disminuye á medida que la flecha es menor, y también á medida que crece la relación $\frac{P}{\pi}$, ó cuando el peso adicional ofrece menos importancia con respecto al peso de la bóveda.

278. Ocupémonos ahora de la parte esencial de la cuestión que estamos tratando, es decir, en determinar el espesor que debe darse á una bóveda para que sus materiales resistan al aplastamiento. Según vimos, teóricamente pasa la curva de presión por un punto de intrados en donde podría verificarse el aplastamiento, si el contacto tuviese lugar únicamente sobre la arista, y esto con más motivo, por ser en este punto la resultante de los esfuerzos actuantes mayor que en la clave; pero la interposición de la capa de mortero separa la curva de la arista, produciendo cierta extensión en la superficie de contacto. Esta extensión es desconocida y difícil de apreciar con alguna probabilidad de exactitud, pues depende de varias cir-

cunstancias poco susceptibles de precisarse en la práctica. Unicamente enseña la experiencia, que la curva no llega generalmente al tercio del espesor de la bóveda en la junta de rotura.

Una de las causas principales que influyen en la magnitud del contacto, procede del movimiento de giro que experimenta la bóveda durante el descimbramiento. Si el asiento del macizo pudiese verificarse sin esta rotación, es evidente que el mortero de la junta se comprimiría por igual, y el contacto abarcaría toda la extensión de esta junta; pero desde el momento que existe la rotación, la junta tiende á abrirse en el trasdos, y se concibe que la compresión debe limitarse á una superficie, tanto menor, cuanto más considerable es el ángulo, descrita por la semibóveda alrededor de la arista de rotura. Tratándose de bóvedas completas, en las que la curva de presión es teóricamente tangente al intrados, este ángulo se divide entre varias juntas, la rotación parcial en cada una de ellas es muy pequeña y la curva se separa del intrados, lo cual es favorable á la resistencia.

En las bóvedas incompletas esta curva corta, en los arranques, al intrados bajo cierto ángulo, y se verifica la rotación casi en totalidad sobre la junta de rotura, que puede decirse es la única que se abre; el contacto es entonces mucho menor y los materiales se hallan más expuestos al aplastamiento.

La experiencia confirma estas consideraciones. Raro es que se observen grietas en el exterior de las bóvedas completas, en donde el movimiento parcial de giro es, según lo que hemos dicho, muy pequeño en cada junta. Como el mortero es susceptible de cierto grado de extensión, podrá muy bien no abrirse, á lo menos de un modo sensible á la vista. Por el contrario, casi siempre son aparentes las grietas en las bóvedas muy rebajadas, por mucho esmero que se tenga en su ejecución. A igualdad de presión sobre las juntas de rotura, el aplastamiento de los materiales es, pues, más temible en las bóvedas incompletas que en las completas.

279. Hemos dicho que la extensión del contacto en la junta de rotura no podía someterse á ningún cálculo; vimos que de-

pendía esta extensión de la magnitud del ángulo de giro efectuado por la bóveda durante el descimbramiento; pero este ángulo depende á su vez de varias causas difíciles de prever. Entre ellas, podemos mencionar la mayor ó menor cantidad de mortero empleado y su repartición en las diversas juntas, los defectos de labra en las dovelas, el sistema ó método de descimbramiento, y en general las diferencias en la mano de obra. Dos bóvedas enteramente iguales en cuanto á su luz, á su flecha y á su espesor, dispuestas además con el mismo aparejo y construídas con iguales materiales, pueden ofrecer distintas posiciones de la curva de presión; hay que admitir forzosamente alguna incertidumbre y contentarse con las indicaciones generales que han sido expuestas.

Así es, que mientras no se empleen en la disposición de las juntas ciertos artificios especiales que obliguen á la curva de presión á pasar por el medio del espesor de la bóveda, dicha curva no se saldrá, en la junta de rotura, del tercio próximo al intrados; el contacto se limitará á una parte de la junta, independiente de su longitud, no ejerciendo el resto ninguna influencia sobre la presión máxima unitaria. Resulta de aquí que podría suprimirse en el trasdos de esta junta y de las inmediatas toda la parte del grueso en donde no se verifica contacto; si no se procede así en la práctica, es porque con este medio no se consigue una gran economía, puesto que el material suprimido quedaría sustituído con el macizo de fábrica que se dispone sobre los senos de la bóveda.

Pero demuestra esto que en general es completamente inútil dar aumento progresivo de espesor, desde la clave hacia los arranques, al macizo de bóveda aparejado por dovelas, según hacen algunos constructores, con objeto de disminuir la presión unitaria en la junta de rotura. No se consigue con esto ventaja alguna, y creemos que la parte aparejada debe disponerse con espesor uniforme, sin perjuicio de construir sobre los riñones el macizo de mampostería antes mencionado, salvo en los frentes, en donde, para el buen efecto, pueda convenir en algunos casos dicho aumento progresivo.

Si examinamos ahora el espesor que debe darse en la clave, nos hallaremos enfrente de nuevas dificultades. En efecto; se ha visto (**249**) que en una bóveda bien construída, la curva de presión se separa poco del medio de la junta situada en el vértice; pasa algo por encima, y su distancia c al intrados está dada por la expresión

$$c = \frac{e(3f + 2e)}{3(2f + e)}.$$

Nos pondremos en mejores condiciones de resistencia tomando para esta distancia $\frac{2}{3}e$, como en el caso de un dintel, y tendremos entonces en el trasdos una presión máxima unitaria igual al doble de la presión media, es decir, que designando por ρ esta expresión máxima, se verifica

$$\rho = \frac{2Q}{e}.$$

Con todo, esta fórmula no nos ofrece el medio de lograr el resultado que nos proponemos, ó sea obtener el espesor de la bóveda, pues el valor de Q varía casi proporcionalmente á e, lo cual hace indeterminado el problema. Demostraremos esta proporcionalidad aproximada, siguiendo un camino que permitirá llegar á una expresión del empuje indicada por algunos autores y que conviene conocer.

280. Consideremos una bóveda rebajada de una amplitud menor de 120° (fig. 143); podrá, si se quiere, constituir la parte de una bóveda de medio punto superior de la junta de rotura. Tomemos por punto de aplicación del empuje en la clave el medio M de la junta vertical, y admitamos que la curva de presión pase también por el medio D de la junta de rotura. Designando por P el peso de la semibóveda, y siendo GL la vertical de su centro de gravedad, se verificará

$$Q = P \times \frac{DL}{MK}.$$

Llamemos, además,

θ, el ángulo DOM;

r, el radio de intrados;

r', el radio del círculo medio que pasa por M y por D;

r'', el radio del círculo que pasa por los centros de gravedad de las dovelas, radio que es casi igual á r', aunque un poco mayor.

Se tiene por de pronto,

$$\mathrm{MK} = r' (1 - \cos. \theta).$$

Para hallar el peso de la semibóveda y la posición de su centro de gravedad, consideraremos una dovela infinitamente pequeña comprendida entre dos radios formando un ángulo $d\theta$; si δ' representa siempre la densidad de la fábrica, se obtiene para el peso de esta dovela

$$\delta' r' e \times d\theta,$$

y para el peso de la semibóveda, con espesor constante,

$$\mathrm{P} = \delta' \int_0^\theta r' e d\theta = \delta' r' e \theta.$$

El momento de la dovela elemental con respecto á la vertical del vértice, es

$$\delta' r' e d\theta \times r'' \operatorname{sen.} \theta,$$

y el momento de la semibóveda tendrá por valor

$$\delta' r' r'' e \int_0^\theta \operatorname{sen.} \theta \, d\theta = \delta' r' r'' e (1 - \cos. \theta);$$

por lo tanto, la distancia LK del centro de gravedad á la vertical OM, estará expresada por

$$\mathrm{LK} = \frac{\delta' r' r'' e (1 - \cos. \theta)}{\delta' r' e \theta} = \frac{r'' (1 - \cos. \theta)}{\theta}.$$

Adviértase que la recta LK es algo mayor que el brazo de

palanca DL del peso de la semibóveda con respecto al punto D, considerado como punto de giro, puesto que el centro de gravedad se halla en la bisectriz del ángulo DOM entre la cuerda y el arco. Reemplacemos en la anterior expresión de Q el brazo de palanca DL por el valor de LK, que es un poco más crecido, y pongamos además en la misma expresión los valores exactos de P y de MK, resulta

$$Q = \delta' r' e \theta \frac{\frac{r'' (1 - \cos. \theta)}{\theta}}{r' (1 - \cos. \theta)} = \delta' r'' e.$$

El radio r'', perteneciente al circulo que pasa por los centros de gravedad de las dovelas, difiere muy poco del radio medio r', por causa de la magnitud del radio de intrados con relación al espesor de la bóveda (**309**); podremos, pues, poner

$$r'' = r + \frac{1}{2} e,$$

y el anterior valor de Q se reduce á

$$Q = \frac{\delta}{e} (2re + e^2),$$

que es la expresión del empuje horizontal de una bóveda indicada por *Navier* (*Application de la mécanique á l'établissement des constructions*), y también por *Dejardin* (*Routine de l'établissement des voûtes.*)

281. Esta fórmula atribuye al empuje una intensidad algo superior á la verdadera, pues para obtenerla hemos admitido dos hipótesis, que concurren ambas á su aumento. Se supone en primer lugar, que el punto charnela se halla en medio de la junta de rotura; pero como sabemos, por la teoría racional de Dupuit, que este punto ha de encontrarse á lo más al tercio, partiendo del intrados, resulta con esto disminuído el brazo de palanca del empuje y este último aumentado como consecuen-

cia. Por otro lado, se ha reemplazado el brazo de palanca DL del peso de la semibóveda por una longitud mayor LK, lo que da lugar á un nuevo aumento de empuje. El error producido por esta última hipótesis, tendrá tanta menor influencia, cuanta más rebajada sea la bóveda.

A pesar de estas inexactitudes y prescindiendo del término e^3, que es muy pequeño, puede admitirse, hasta cierto punto, que la intensidad del empuje horizontal de una bóveda es proporcional á su espesor.

Dedúcese también de la misma expresión anterior del empuje otra advertencia, que nos servirá más adelante; consiste en que puede igualmente considerarse el empuje como sensiblemente proporcional al radio de la bóveda.

Se ve, pues, que el espesor de una bóveda tiene escasa influencia sobre la presión máxima en la clave, puesto que sobre todo en las bóvedas muy rebajadas, este espesor y el empuje pueden considerarse como proporcionales. Pero no puede menos de reconocerse que las sobrecargas establecidas en los puentes ejercerán tanto menor efecto sobre la presión en la clave, cuanto más grueso presente la bóveda; por lo tanto, bajo este punto de vista, podría parecer conveniente aumentar el espesor; pero constituye esto un medio que no debe utilizarse, porque no es en la clave en donde hay que temer el aplastamiento de los materiales, sino en la junta de rotura, por tomar allí la presión total mayor intensidad, es decir, por ser su valor $\sqrt{P^2 + Q^2}$, y además, por distribuirse sobre una superficie relativamente pequeña. Así es que aumentando el espesor de la clave, podrá reducirse la presión en la junta superior, pero se aumentará de fijo el peso y el empuje de la bóveda, y por lo tanto, la resultante en la junta de rotura; de donde se deduce que los materiales de una bóveda se hallan tanto más expuestos al aplastamiento, cuanto mayor es su espesor. Debe, pues, reducirse éste á lo que exige la estabilidad de la bóveda.

282. La indagación del espesor en la clave se convierte en un problema puramente práctico que es forzoso resolver por la

experiencia de las construcciones existentes. Pero esta experiencia no puede suministrar indicaciones muy precisas, atendiendo á la diversidad de espesores que se observan en obras semejantes por su forma y dimensiones. Los primeros constructores han dado al espesor de clave $\frac{1}{12}$ de la luz; con posterioridad se ha reducido esta fracción á $\frac{1}{24}$, y aun se ha ido mucho más lejos, según veremos al examinar los grandes puentes. Cada uno ha procedido algo por sentimiento, teniendo en cuenta las circunstancias especiales de la obra, la naturaleza de los materiales empleados, y por último, guiándose por las diversas fórmulas empíricas propuestas por diferentes autores, las cuales vamos á recordar.

La más antigua, la más conocida y la que generalmente es adoptada por los constructores, se debe á *M. Perronet*, y es como sigue:

$$e = 0,0347\ \text{A} + 0^{\text{m}},325;$$

e, designa el espesor de clave en metros;
A, luz de la bóveda ó distancia entre sus dos estribos.

La fórmula que antecede ha sido ligeramente modificada por *M. Leveillé*, quien la presenta bajo la forma

$$e = \frac{1 + 0,1\ \text{A}}{3}.$$

Se ve que los resultados han de ser casi iguales, pues esta última expresión equivale á

$$e = 0,333 + 0,033\ \text{A}.$$

Estas dos fórmulas dan espesores demasiado considerables para grandes luces; así es que *Gautey* propone reemplazarlas, á partir de $\text{A} = 16^{\text{m}},00$, por la siguiente:

$$e = 0,042\ \text{A} = \frac{1}{24}\ \text{A},$$

y á partir de $A = 32^m,00$, por

$$e = 0,021\ A + 0^m,67.$$

283. Indica *M. Dejardin*, como convenientes, las que siguen:

$e = 0^m,30 + 0,10\ R$, para bóvedas de medio punto;

$e = 0,30 + 0,05\ R$, para las circulares rebajadas á $\frac{1}{6}$

$e = 0,30 + 0,035\ R$, para las circulares rebajadas á $\frac{1}{8}$;

$e = 0,30 + 0,02\ R$, para las circulares rebajadas á $\frac{1}{10}$;

$e = 0,30 + 0,07\ R$, para los arcos elípticos.

En estas fórmulas R representa el radio del arco en el vértice del intrados; para compararlas con la fórmula de Perronet, reemplazaremos el radio R por su valor en función de la luz A, y se obtiene

$e = 0^m,30 + 0,05\ A$, para los medios puntos;

$e = 0,30 + 0,041\ A$, para arcos rebajados á $\frac{1}{6}$;

$e = 0,30 + 0,037\ A$, para arcos rebajados á $\frac{1}{8}$;

$e = 0,30 + 0,026\ A$, para arcos rebajados á $\frac{1}{10}$;

$e = 0,30 + 0,052\ A$, para arcos elípticos.

Los espesores deducidos de estas fórmulas son aún más crecidos que los que da la fórmula de Perronet y no los consideramos convenientes, especialmente para grandes luces. Ofrecen además el defecto, como fórmulas prácticas, de ser muy numerosas, obligando además á tener en cuenta la flecha del arco. Debe reconocerse, sin embargo, que M. Dejardin asigna á la bóveda espesores, tanto más reducidos, cuanto más rebajada se halla, lo cual está conforme con la teoría expuesta.

284. Se emplea en Alemania una fórmula que presenta al-

guna analogía con la primera de las propuestas por Dejardin; es la siguiente:

$$e = 0^{m},43 + 0{,}10\,R + 0^{m},02s.$$

En la anterior expresión representa s la altura de la sobrecarga de tierra por encima de la bóveda. El coeficiente de R es el mismo que en la primera fórmula de Dejardin, el término constante es aún más crecido, por lo tanto, los resultados han de ser demasiado considerables para grandes luces.

El último término tiene por objeto atender á la sobrecarga de tierra sobre la clave. En las demás fórmulas indicadas se prescinde de esta sobrecarga, en atención á ser casi siempre muy limitada y conocida con corta diferencia. Unicamente en los grandes terraplenes podrá adquirir cierta importancia; pero entonces la luz de la obra de fábrica suele ser de escasa magnitud; se concibe que entonces el terraplén formará bóveda por encima del trasdos, y la parte de sobrecarga que corresponde á la luz trasmitirá su acción sobre las tierras adyacentes. Sin embargo, no vemos inconveniente en que se añada el término $0{,}02s$ en todas las fórmulas de espesor de clave, especialmente en el caso últimamente considerado.

Hemos dicho que las fórmulas anteriormente indicadas dan espesores demasiado crecidos para grandes luces; sin embargo, no pasando éstas de $16^{m},00$, se obtendrán resultados muy aceptables con la regla de *Perronet.* Modificándola, según *Leveillé*, se presta á un enunciado en lenguaje vulgar, que permite aplicarla con rapidez y obtener el resultado de memoria sin ningún cálculo. El enunciado es como sigue:

Añádanse diez unidades á la luz y tómese el tercio de la suma, y se hallará el espesor de clave expresado en *decímetros.* Es evidente que equivale esto á tomar el treintavo de la luz aumentada en diez unidades, lo que concuerda con la fórmula de *Leveillé.*

285. Las fórmulas que anteceden son todas lineales, y se comprende que bajo semejante forma han de dar espesores que

crecen con mucha rapidez á medida que aumenta la luz. Para evitar este inconveniente, proponen otros autores expresiones con una radical de segundo grado.

Citaremos como ejemplo la fórmula de M. Lesguellier

$$e = 0{,}20\sqrt{A + 0{,}10}\ ,$$

y la de M. Dupuit

$$e = 0{,}20\sqrt{A}\,.$$

Dice M. Dupuit que la anterior fórmula únicamente debe emplearse para medios puntos y arcos carpaneles; tratándose de arcos escarzanos, la sustituye por la siguiente:

$$e = 0{,}15\sqrt{A}\ .$$

Esta última expresión reduce los resultados en una cuarta parte. Apoya la necesidad de la reducción en el examen de un gran número de puentes, en los que se observa efectivamente la tendencia de los constructores á dar menos espesor á las bóvedas rebajadas, á igualdad de luz, lo cual está conforme con la teoría.

Las siguientes fórmulas han sido propuestas por *M. Croizette Desnoyers*:

$e = 0{,}15 + 0{,}15\sqrt{2R}$, para los medios puntos;

$e = 0{,}15 + 0{,}14\sqrt{2R}$, para los escarzanos á $\frac{1}{6}$;

$e = 0{,}15 + 0{,}13\sqrt{2R}$, para los escarzanos á $\frac{1}{8}$;

$e = 0{,}15 + 0{,}12\sqrt{2R}$, para los escarzanos á $\frac{1}{10}$;

$e = 0{,}15 + 0{,}15\sqrt{2R}$, para las bóvedas elípticas ó carpaneles.

En las cuatro primeras fórmulas R designa el radio de intrados, y en la última el radio del arco de círculo de igual luz y flecha que la bóveda carpanel.

Si en estas fórmulas reemplazamos R por su valor en fun-

ción de la luz A, lo que permitirá establecer comparación, hallaremos

$e = 0,15 + 0,15 \sqrt{A}$, para los medios puntos;

$e = 0,15 + 0,18 \sqrt{A}$, para los arcos escarzanos á $\frac{1}{6}$;

$e = 0,15 + 0,19 \sqrt{A}$, para los arcos escarzanos á $\frac{1}{8}$;

$e = 0,15 + 0,19 \sqrt{A}$, para los arcos escarzanos á $\frac{1}{10}$;

$e = 0,15 + 0,156 \sqrt{A}$, para los elípticos á $\frac{1}{3}$.

Los espesores obtenidos con estas fórmulas no obedecen á la regla establecida por M. Dupuit y por M. Dejardin, regla que asigna menos espesor á los arcos escarzanos que á los medios puntos; sucede precisamente lo contrario, resultando, por lo tanto, mayor grueso que el que indica la segunda expresión de Dupuit $e = 0,15 \sqrt{A}$. Acaso parezca este último algo deficiente.

286. Nos hemos propuesto también hallar una fórmula sencilla de la cual pueda deducirse el espesor de clave para toda clase de bóvedas, y cuyos resultados estén en consonancia con la experiencia que suministran las construcciones existentes. Para conseguirlo adoptamos un radical de tercer grado, que da lugar á un crecimiento de espesor menos rápido, á medida que aumenta la luz de la bóveda. Creemos perfectamente aplicable la siguiente expresión

$$e = \frac{1}{3} \sqrt[3]{A}.$$

Con el objeto de poder apreciar la validez de esta fórmula, compararemos sus resultados con los que suministran las de Perronet, Dupuit, Croizette-Desnoyers, y también con los espesores que se han dado en ejecución á un gran número de puentes. Para facilitar la comparación, hemos formado los estados siguientes, cuyos datos principales están deducidos de la obra de M. Dupuit:

NÚMERO 52

CUADRO *comparativo de espesores en la clave.*

DESIGNACION DE LAS OBRAS	Luz.	Flecha.	Radio.	ESPESOR EN LA CLAVE				
				En ejecución.	SEGÚN LA FÓRMULA			
					Perronet.	Dupuit.	Croisette.	Propuesta.
BÓVEDAS DE MEDIO PUNTO								
	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
Viaducto de Saint-Maurice	8,00	4,00	4,00	0,65	0,60	0,56	0,57	0,67
» de Roesbaechel	8,60	4,30	4,30	0,95	0,62	0,59	0,59	0,68
» de Voulzie	9,00	4,50	4,50	0,80	0,63	0,60	0,60	0,69
» de Indre	9,80	4,90	4,90	0,90	0,66	0,63	0,62	0,71
» de Chantilly	10,00	5,00	5,00	0,75	0,67	0,63	0,62	0,72
» de Chaumont	10,00	5,00	5,00	0,56	0,67	0,63	0,62	0,72
» de Brunoy	10,00	5,00	5,00	0,90	0,67	0,63	0,62	0,72
» de Saint-Germain	10,00	5,00	5,00	0,95	0,67	0,63	0,62	0,72
» del canal Saint-Martin	11,00	5,50	5,50	1,20	0,70	0,66	0,65	0,74
» de Schwelm	11,30	5,65	5,65	0,94	0,71	0,67	0,65	0,75
Puente de Layon	12,00	6,00	6,00	0,60	0,73	0,69	0,67	0,76
Viaducto de la Fure	13,80	6,90	6,90	0,75	0,79	0,74	0,71	0,80
Puente de Angers	14,00	7,00	7,00	0,70	0,80	0,75	0,71	0,80
Viaducto de Nogent	15,00	7,50	7,50	1,00	0,87	0,77	0,73	0,82
» de Basses-Grauges	15,00	7,50	7,50	1,50	0,87	0,77	0,73	0,82
» de Dinan	16,00	8,00	8,00	1,00	0,87	0,80	0,75	0,84
» de Opladen	17,58	8,79	8,79	0,94	0,92	0,84	0,78	0,87
Puente de Sévres	18,00	9,00	9,00	1,00	0,93	0,85	0,79	0,87

Puente de Kiew	18,80	9,40	9,40	0,81	0,96	0,87	0,80	0,89
» de Gorlitz	18,83	9,42	9,42	0,94	0,96	0,87	0,80	0,89
Viaducto de Comelle	19,00	9,50	9,50	1,00	0,97	0,87	0,80	0,89
Puente de Villevêque	20 00	10,00	10,00	0,80	1,00	0,89	0,82	0,90
» del Norte de Edimboug	22,00	11,00	11,00	0,84	1,07	0,93	0,85	0,93
» de Semur	23,40	11,70	11,70	0,97	1,11	0,97	0,88	0,95
» de Alby	27,60	13,80	13,80	1,30	1,25	1,05	0,94	1,01
» de Annecy en Aix	30,00	15,00	15,00	1,50	1,33	1,09	0,97	1,03
» de Têtes	38,00	19,00	19,00	1,46	1,60	1,23	1,07	1,12
» de Saint-Sauveur	42,00	21,00	21,00	1,50	1,73	1,29	1,12	1,16
» de Ceret	44,80	22,40	22,40	1,62	1,83	1,34	1,15	1,18
Viaducto de Nogent-sur-Marne	50,00	25,00	25,00	1,80	2,00	1,41	1,17	1,21
BÓVEDAS ESCARZANAS								
Puente de Mélizey	11,40	1,50	11,58	0,60	0,71	0,51	0,77	0,75
» de Brunswick	11,62	1,57	11,54	0,63	0,72	0,51	0,77	0,76
» de Couturette	13,00	1,86	12,28	0,90	0,77	0,54	0,82	0,78
» de Wiperfurth	14,13	3 53	8,83	0,78	0,80	0,56	0,78	0 80
» de Nemours	16,20	1,11	30,84	0,97	0,87	0,60	0,93	0,84
» de Glasgow	17,69	3,35	13,33	0,76	0,92	0,63	0,89	0,87
» de Bendly	18 30	6,10	9,91	0,66	0,94	0,63	0,88	0,87
» de Conon	19,80	6,60	10,72	0,74	0,99	0,67	0,84	0,90
» de Tilsitt	22,84	2,75	25,00	1,10	1,09	0,72	1,07	0,95
» de Orfevres (Florencia)	25,90	4,60	20,45	1,01	1,20	0,76	1,10	0,99
» de Darlaston	26 37	4,11	23,25	1,07	1,21	0,76	1,10	0,99
» de Dunkeld	27,40	9,10	14,86	0,96	1,35	0,78	0,97	1,00
» de los Inválidos	31,60	4,10	32,89	1,20	1,42	0,84	1,20	1,06
» de Saint-Esprit	33,00	8,20	20,70	1,08	1,43	0,86	1,11	1,07
» de Tongueland	36,00	11,60	19,77	1,07	1,53	0,90	1,09	1,10
» de Pontypridd	42,67	10,67	26,65	0,91	1,75	0,97	1,25	1,16
» de Tournon	47,80	19,82	24,32	0,85	1,93	1,04	1,26	1,21
» de Chester	61,00	12,81	42,73	1,22	2,37	1,17	1,49	1,31
» de Cabin John	67,00	18,00	40,17	1,27	2,57	1,23	1,49	1,35

DESIGNACIÓN DE LAS OBRAS	Luz.	Flecha.	Radio.	ESPESOR EN LA CLAVE				
				En ejecución.	SEGÚN LA FÓRMULA			
					Perronet.	Dupuit.	Croisette.	Propuesta.
BÓVEDAS CARPANELES								
	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
Puente de Saint-Michel	17,20	6,48	11,07	0,70	0,90	0,87	0,78	0,86
» de Notre-Dame	18,76	7,49	11,78	0,90	0,98	0,85	0,81	0,89
» de Wellesley	21,34	5,33	21,35	0,61	1,03	0,92	0,92	0,92
» de Charenton sobre el Sena	22,00	6,00	20,16	0,85	1,07	0,94	0,92	0,93
» » sobre el Marne	27,00	8,00	22,74	1,00	1,23	1,04	0,98	1,00
» de la Trinidad en Florencia	29,20	4,86	43,95	0,97	1,31	1,08	1,21	1,03
» de Point-du-Jour	30,25	9,00	25,40	1,00	1,32	1,09	1,03	1,03
» de Change	31,60	8,00	31,20	1,00	1,39	1,13	1,09	1,06
» de Louis-Filippe	32,00	8,25	31,03	1,00	1,40	1,13	0,96	1,06
» de Toulouse	34,40	12,70	23,29	0,81	1,48	1,16	1,05	1,08
» de Waterloo	36,60	9,10	36,80	1,52	1,55	1,20	1,23	1,11
» de Neuilly	39,00	9,75	39,00	1,62	1,63	1,25	1,20	1,13
» de Alma	43,00	8,60	53 75	1,50	1,77	1,31	1,33	1,17
» de Gloucester	45,75	16,50	31,82	1,37	1,86	1,36	1,22	1,19

287. El examen de estos estados da lugar á algunas observaciones importantes. Se ve, en primer lugar, que los espesores de clave dados en ejecución presentan grandes anomalías, puesto que varían entre límites algo extensos en obras de una misma naturaleza, ó bien para ciertas luces son inferiores á los asignados á otras de menor importancia. Puede explicarse en gran parte esta anomalía fijándose en una preocupación bastante generalizada, la cual atribuye mayor grueso á la bóveda á medida que los materiales empleados ofrecen menos resistencia al aplastamiento. Pero este principio es erróneo, porque si bien, aunque atendiendo á la sobrecarga, el aumento de espesor puede dar lugar á una disminución de presión unitaria en la clave, no es menos cierto que este aumento hace crecer el peso de la bóveda, el empuje, y por lo tanto, el valor de la resultante $\sqrt{P^2 + Q^2}$, que actúa en la junta de rotura sobre una pequeña extensión superficial próxima al intrados, extensión cuya magnitud es independiente de la longitud de esta junta. Resulta con esto mayor presión unitaria, y si los materiales son menos resistentes, deberá suceder precisamente lo contrario, es decir, que será oportuno entonces aligerar más la bóveda disminuyendo su espesor.

Examinemos ahora los resultados correspondientes á las distintas fórmulas, empezando por los medios puntos. Hasta la luz de 15 metros, los espesores obtenidos con la fórmula que proponemos concuerdan bastante con los de Perronet; pero las reglas de Dupuit y de Croizette-Desnoyers dan resultados inferiores. A partir de esta luz, nuestros espesores crecen con menos rapidez que los de Perronet, y lo mismo sucede según Dupuit y de Croizette, aunque en menor grado; estos últimos llegan á igualarse con nuestros resultados para grandes luces, mientras que los de Dupuit van aún más allá. Si establecemos ahora la comparación con los espesores de ejecución, nos encontraremos con las anomalías antes mencionadas, viéndose que algunos constructores han sobrepujado aún los resultados de la fórmula de Perronet; pero para grandes luces la generalidad los reduce, si bien en cantidades pequeñas, que no suelen

pasar de $0^m,20$. Denota esto gran timidez por parte de los constructores en separarse de la regla establecida por este distinguido ingeniero.

Acaso parezcan entonces algo deficientes los espesores que proponemos para las mismas grandes bóvedas, por alejarse mucho más de la citada regla. Podríamos justificarlos apoyándonos en la autoridad del distinguido ingeniero Croizette-Desnoyers, el cual indica dimensiones inferiores aún á las nuestras; pero vamos á demostrar, fundándonos en la experiencia de las construcciones existentes, que pueden adoptarse sin temor dichos espesores propuestos. Para esto, fijémonos en el estado relativo á los arcos escarzanos, y consideremos los seis últimos puentes. Estas obras, excepción hecha del penúltimo, están rebajadas á lo más á $\frac{1}{4}$, y esto motiva que las juntas de rotura deban encontrarse más bien por encima de los arranques que por debajo. Si reemplazamos ahora cada uno de estos arcos por los que resultan prolongándolos hasta completar el medio punto, no habremos alterado la posición de la junta de rotura con respecto al vértice de la bóveda; por lo tanto, toda la parte de macizo superior á esta junta se hallará, á igualdad de espesor y en uno como en otro caso, absolutamente en las mismas condiciones de peso, de sobrecarga, de empuje en la clave, y por fin, de empuje en la junta de rotura. Resulta de aquí que los espesores de clave dados en ejecución á las bóvedas que estamos examinando, son perfectamente aplicables á los medios puntos de igual radio respectivo. Podría, pues, asignarse como espesor de clave:

$1^m,08$ á un medio punto de $41^m,40$ de luz (puente de S. Esprit), mientras que con nuestra fórmula se obtiene $1^m,15$;

$1^m,07$ á un medio punto de $39^m,54$ (puente de Tougueland); nuestra fórmula da $1^m,14$;

$0^m,91$ á un medio punto de $53^m,30$ (puente de Portypridd), y proponemos $1^m,25$;

$0^m,85$ á un medio punto de $48^m,64$ (puente de Tournon), y proponemos $1^m,22$;

$1^m,27$ á un medio punto de $80^m,34$ (puente de Cabin John), y asignamos $1^m,43$.

Estas observaciones demuestran que los espesores que resultan de nuestra fórmula y también de la de Croizette-Desnoyers, son muy admisibles para los medios puntos.

288. Si examinamos ahora los espesores propuestos para arcos escarzanos, se verá que concuerdan bastante con los que se han dado en ejecución. Las pequeñas diferencias son en exceso, por lo general, salvo algunas irregularidades. Los resultados de M. Croizette-Desnoyers son más crecidos que los nuestros, pero sucede lo contrario, según la regla de Dupuit. Puede, además, advertirse que es sobre todo en los puentes circulares rebajados, en donde los constructores han reducido notablemente los espesores excesivos procedentes de la fórmula de Perronet.

289. Pasemos á las bóvedas carpaneles. Mientras no se llega á la luz de $34^m,40$ correspondiente al puente de Toulouse, nuestros espesores, aunque más pequeños que los de Perronet, superan, sin embargo, á los asignados en ejecución; pero los cuatro puentes que siguen al mencionado ofrecen con la realidad diferencias en menos, comprendidas entre 0,40 y 0,50. Consideramos, sin embargo, admisibles los menores resultados de nuestra fórmula, puesto que siendo aplicables á los medios puntos y á los arcos escarzanos, con más motivo podrán adoptarse para arcos carpaneles de igual luz y de igual flecha, en atención á que en estos últimos la parte superior á la junta de rotura se encuentra mucho más aplastada; el radio en el vértice, así como el empuje, son mayores, y las oscilaciones de la curva de presión tendrán menos importancia. Los cuatro últimos resultados de la fórmula de M. Croizette-Desnoyers se acercan bastante á los propuestos, aunque son algo más crecidos, especialmente el penúltimo.

Creemos, pues, que la fórmula propuesta $e = \frac{1}{3}\sqrt[3]{A}$, es admisible para toda clase de arcos.

290. Después de señalar el espesor en la clave de una bó-

veda, se trazará el trasdos paralelo al intrados para formar la parte aparejada en dovelas, salvo el caso en que quiera darse aumento progresivo de grueso hacia los arranques, según se hace á veces; pero no aconsejamos esta disposición más que para los planos de frente y con objeto de que haga buen efecto. En el interior de la bóveda no podría dicho aumento contribuir á la reducción del esfuerzo unitario en la junta de rotura, exceptuando el caso en que por un medio cualquiera se obligase á la curva de presión á pasar por el centro de la junta. Para conseguir este resultado, podrían simplemente relabrarse los planos de asiento de las dovelas próximas al punto charnela, de manera que quedara ligeramente disminuída la latitud de intrados del sillar, con lo cual resultarían algo ensanchadas las juntas en la parte próxima á dicho intrados, según se indica en la figura 144.

Este ensanche ha de ser muy pequeño, pues debe constituir una fracción del ángulo total de giro de la bóveda durante el descimbramiento, ángulo que además se reparte sobre varias juntas. No es fácil determinar la magnitud de la rotación, por depender de varias causas difíciles de apreciar con la suficiente exactitud, tales como el sistema de construcción y descimbramiento de la bóveda, el grueso de las juntas, la naturaleza y estado de sequedad del mortero empleado en el instante del descimbramiento; puede, sin embargo, formarse una idea aproximada de su importancia por medio de las siguientes consideraciones.

291. Designemos por a la semiluz de la bóveda al nivel del punto charnela (fig. 145), por c la cuerda del semiarco y por f la flecha; se tiene

$$c^2 = a^2 + f^2,$$

y diferenciando

$$2cdc = 2fdf,$$

de donde se deduce

$$\frac{df}{c} = \frac{dc}{f}.$$

Pero $\frac{df}{c}$ representa el ángulo total de giro, ángulo que es proporcional á la disminución de longitud de la cuerda y se halla en razón inversa de la flecha. Tendríamos, pues, el valor de la rotación en cuanto se conociera esta disminución producida por la compresibilidad del mortero; para conseguirlo, deberá tenerse en cuenta el grueso total de todas las juntas, la naturaleza y estado del mortero en el acto del descimbramiento, y por último, la intensidad del empuje. Es evidente que podrían obtenerse algunos datos aproximados por medio de experiencias hechas en pequeña escala.

Adviértase que suponiendo conocida la rotación, si la multiplicamos por la cuerda c, hallaremos la disminución df de la flecha, disminución que constituye un dato de mucha utilidad para el caso en que se quisiera dar peralte á la cimbra, al objeto de evitar la deformación del perfil de intrados con el asiento.

292. Se ha demostrado que el punto de aplicación del empuje en la clave estaba situado algo por encima del medio de la junta; pero podría también obligársele á pasar exactamente por este medio, vaciando ligeramente la junta hacia el trasdos. Obtendríamos entonces una curva de presion, la cual, á pesar de sus puntos de partida y de llegada, podría muy bien dejar de coincidir en los demás con la curva media del espesor de la bóveda, y es precisamente esta coincidencia la que se trata de conseguir para llegar á una presión unitaria mínima. Indicaremos más adelante (**293**) un procedimiento gráfico que exige algún tanteo, y mediante el cual puede lograrse dicha coincidencia con un grado de exactitud suficiente en la práctica, siendo inútil llevar la precisión demasiado lejos; por más que se haga, la curva de presión experimentará siempre variaciones producidas por las sobrecargas accidentales.

El procedimiento antedicho, á pesar de su tanteo, es mucho más breve que los largos cálculos presentados por *M. Ivon Villarceau* en su nueva teoría de bóvedas. Pero estos cálculos, que tienen también por objeto hacer coincidir la curva de pre-

sión con la media del espesor, no pueden conducir á ningún resultado, en tanto no se consiga, por medio de algún artificio, hacer pasar la primera de éstas curvas por el medio de las juntas de rotura y del vértice; de no ser así, según la teoría racional que hemos desarrollado, dicha curva cortará siempre á la junta de rotura cerca del intrados, y nunca se confundirá con la curva media. Además, admite *M. Ivon Vilarceau* en su teoría, que la sobrecarga actúa normalmente á la bóveda, como lo haría un líquido, lo cual no es exacto; creemos mucho más lógico asignar á la acción de la sobrecarga una dirección vertical como la de un peso. Por último, el autor de esta nueva teoría consigue fijar la curva de presión en el centro del espesor, modificando el perfil de intrados; pero esta modificación ofrece inconvenientes en la práctica, puesto que obliga á desechar las curvas circulares generalmente empleadas, que se trazan con sencillez y presentan mejor aspecto.

293. La sobrecarga fija de los puentes se compone de un macizo destinado á formar la rasante del camino. Cuando la obra no es de mucha importancia, constituye este macizo un simple relleno de tierra y es el sistema más económico; pero en los grandes puentes daría lugar á un peso excesivo, por lo que se sustituye con la construcción de bóvedas de ladrillo, cuyos vanos y macizos permiten reducir la carga en una proporción bastante importante y susceptible de fijarse de antemano. Se concibe que distribuyendo convenientemente dichos vanos y macizos, sea factible variar la intensidad de la sobrecarga en distintos puntos de la bóveda principal, de modo que la curva de presión se modifique y pase por los puntos medios de las juntas.

Considérese para esto la parte de una bóveda superior á la junta de rotura CD, y determinada por la curva de intrados BD (fig. 146) y por la rasante horizontal EL de la vía. Después de fijar en la clave el espesor AB calculado por una de las fórmulas prácticas, se trazará como primera aproximación el trasdos AC dándole cierto ensanche hacia los arranques; hágase, por ejemplo, CD igual á vez y media AB, salvo

rectificación ulterior. Reduciendo las ordenadas comprendidas entre el trasdos de la bóveda y la rasante en una misma proporción fijada de antemano, igual á la relación existente entre el peso por unidad de la sobrecarga y el de la piedra que compone la bóveda, se obtendrá la curva IJ, que constituye la terminación superior del macizo BIJCD, el cual podrá considerarse como de igual densidad. La parte de este macizo comprendida entre las curvas AC y IJ obrará, por hipótesis, verticalmente sobre la bóveda; adoptando el punto M, medio de AB, como el de aplicación del empuje, y el medio de CD como punto de paso de la curva en la junta de rotura, se determinará la intensidad de este empuje Q, deduciendo después el valor de la resultante $\sqrt{P^2 + Q^2}$ para todas las juntas de la bóveda, y podrá entonces rectificarse el primitivo trazado del trasdos. Para mayor exactitud se reharán, si se quiere, los cálculos que determinan el punto de rotura y la intensidad del empuje, partiendo del nuevo trasdos y después de rectificar la curva IJ; se procede luego al trazado de la curva de presión, suponiendo siempre que se la ha obligado á pasar por el medio de las juntas AB y CD.

Para efectuar este trazado, basta dividir el macizo en un pequeño número de partes, cuatro, por ejemplo; se hará la subdivisión por medio de normales al intrados en el dovelaje, y de verticales en el resto que compone la sobrecarga. Sean l_1, l_2, l_3, l_4 (fig. 147) las verticales que pasan por los centros de gravedad pertenecientes á los conjuntos de cada dovela ficticia con su respectiva sobrecarga. Sobre la horizontal del empuje en M, y á partir de su encuentro g_1 con la primera vertical, se llevará una longitud g_1s_1 proporcional á la intensidad de este empuje, luego se trazará la vertical s_1t_1 representando en la misma escala el peso de la primera subdivisión del macizo, es decir, el peso de la primera dovela con su sobrecarga; la línea g_1t_1 dará la intensidad de la primera resultante que corta á la junta EF en el punto m_1 perteneciente á la curva de presión. Se llevará la longitud g_1t_1 en g_2s_2 sobre su prolongación y á partir de g_2; se trazará luego la vertical s_2t_2

igual al peso de la segunda subdivisión; la segunda resultante g_2t_2 señalará por su intersección con la junta HI un nuevo punto m_2 de la curva de presión. Lo mismo debe hacerse para la tercera subdivisión que suministra el punto m_3 de la curva. Por fin, la última resultante g_4t_4, correspondiente á la cuarta subdivisión, ha de cortar á la junta CD en el punto medio que sirvió para el cálculo del empuje horizontal.

Pero podrá muy bien suceder que los tres puntos intermedios m_1, m_2, m_3, no se hallen en el medio de las juntas respectivas, y para lograrlo será necesario modificar convenientemente el peso de cada una de las subdivisiones del macizo, ó más bien el peso de la sobrecarga correspondiente. Al trazar la curva $Mm_1m_2m_3m_4$ se han tomado por incógnitas las direcciones de las diversas resultantes parciales g_1t_1, g_2t_2, g_3t_3, g_4t_4; pero en vez de esto tomaremos, como datos desconocidos, los pesos de las subdivisiones del macizo; podrán fijarse entonces estas direcciones haciéndolas pasar por los puntos medios de las juntas. Así es que después de haber llevado sobre la horizontal de M la longitud g_1s_1 igual al empuje, se trazará la resultante g_1t_1 de modo que pase por el medio de EF; la vertical s_1t_1 dará el peso de la primera parte del macizo, y la longitud g_1t_1 el valor de la primera resultante. Se trasladará ésta en g_2s_2 sobre su prolongación, y se tirará g_2t_2 que pase por el medio de HI; la vertical s_2t_2 representará el segundo peso, y así sucesivamente hasta la cuarta resultante, que determinará el último peso. Como comprobación de las operaciones, deberá resultar igualdad entre la suma de los cuatro nuevos pesos y los cuatro primitivos, que componen todo el macizo que hemos supuesto homogéneo; pero comparando aisladamente dos á dos los respectivos pesos parciales, se hallarán diferencias. Con objeto de conseguir los valores obtenidos para los nuevos pesos, será preciso modificar la sobrecarga, disponiendo convenientemente los vasos y los macizos de las bovedillas de ladrillo, procurando al mismo tiempo no alterar la posición de las verticales que pasan por los centros

de gravedad relativos á las subdivisiones del macizo total. Es cuestión de tanteo.

294. Hemos indicado que en esta clase de operaciones no era preciso llevar demasiado lejos la exactitud, pues la curva de presión experimentará siempre modificaciones debidas á las sobrecargas accidentales. Según lo que se ha visto, tienden éstas á levantar la curva; por lo tanto, al fijar la posición de los puntos m_1, m_2, m_3, será conveniente situarlos más bien un poco por encima del medio del espesor, que por debajo.

Se ha dicho también que existen otras causas numerosas susceptibles de modificar en la práctica la posición de la citada curva, de lo cual se desprende que el procedimiento antes indicado nunca dará más que aproximadamente la solución del problema, cuyo objeto consiste en disponer la bóveda de un puente de modo que todos los planos de junta se hallen sometidos á una misma presión uniforme. Creemos que, á pesar de esto, merece este procedimiento ser aplicado en el estudio de una obra de gran luz, para la cual podrá fijarse el espesor mínimo de la bóveda de manera que la presión máxima, en sus diversos puntos, se halle en relación conveniente con la resistencia de la piedra empleada, teniendo á la par en cuenta las circunstancias aleatorias del problema.

Por otra parte, M. Dupuit no aconseja recurrir á este medio para toda clase de bóvedas; demuestra, en efecto, la experiencia, que en un gran número de casos el procedimiento ordinario no presenta el menor inconveniente; no hay, por lo tanto, ventaja alguna en complicarlo; pero cuando la bóveda es de mucha luz, si además el material ofrece poca resistencia, conviene entonces echar mano de los varios medios conocidos para alejar la curva de presión del intrados de la junta de rotura.

No es fácil conocer las precauciones que con este motivo se han adoptado al construir los puentes de gran magnitud, hoy día existentes, pero sí podemos indicar una circunstancia que presta apoyo á la teoría de M. Dupuit; consiste en que desde hace mucho tiempo los constructores habían notado tendencia en verificarse la máxima presión á proximidad del

intrados de ciertas juntas, por efecto de la rotación que tenía lugar en el acto del descimbramiento de las bóvedas.

Con este motivo el ingeniero *Perronet*, en una memoria publicada en 1793, sobre los medios que deben emplearse para construir arcos de fábrica de gran luz, aconseja se adopten en el intrados de la bóveda almohadillados ó acanalados que alejen la máxima presión del borde de la junta y eviten su rotura. Indica también que, al sentar las dovelas, conviene se extienda el mortero solo hasta cierta distancia del borde del lecho, rellenando el resto con estopa que impida la salida de la mezcla, y que después de efectuado el asiento se quita y se reemplaza por cemento.

295. Hemos dicho y repetimos, que en la gran mayoría de los casos la curva de presión pasa en la junta de rotura á gran proximidad del intrados y á una distancia independiente de la longitud de esta junta; deducimos, como consecuencia de este hecho, que era entonces inútil dar á la parte adovelada del macizo un aumento progresivo de espesor desde la clave hacia los arranques, pudiendo disponerse esta parte con un espesor uniforme, pues el aumento no había de contribuir á la disminución de la máxima presión en la citada junta de rotura. Exceptuamos el caso en que, tratándose de una obra de mucha importancia, se empleara un artificio de construcción que alejase dicha curva del punto charnela situado en el intrados, aproximándola al medio de la junta; en semejantes circunstancias debía disponerse el espesor de modo que variase proporcionalmente á la intensidad de la resultante $\sqrt{P^2 + Q^2}$. Si además se distribuye convenientemente la sobrecarga, podrá conseguirse así someter la bóveda á una misma presión uniforme en todos sus puntos.

Pero aconsejaremos también el ensanche progresivo del espesor de bóveda, siempre que se adopten los procedimientos modernos de ejecución empleados en un gran número de puentes importantes, construídos de algunos años á esta parte. Haremos algunas indicaciones con respecto á estos procedimientos, debidos principalmente al empleo de las mezclas de fraguado rápido.

El asiento total que experimenta el intrados de una bóveda, desde el perfil que afecta la superficie exterior de la cimbra antes de estar cargada, hasta la posición definitiva que ocupa el borde de la fábrica, después de efectuar el descimbramiento, se compone de dos partes, y es debido á dos causas distintas. Procede la primera del descenso progresivo peculiar á la armazón de madera, ocasionado por el peso de los materiales que ha de sustentar provisionalmente; la segunda está motivada por el asiento propio de la fábrica durante el descimbramiento. Ambos descensos son susceptibles de variar mucho, según sea el sistema de construcción empleado; así es que, tratándose del primero, si se adopta la forma de cimbras llamadas recogidas, que solo presentan dos puntos de apoyo y suelen ser muy deformables, puede llegar la baja del vértice hasta la cantidad de medio metro, según sucedió en el puente de *Neuilly*; en cambio, empleando cimbras rígidas con varios puntos de apoyo y convenientemente articuladas, se reduciría la baja á muy pocos centímetros. El segundo descenso, ó sea el asiento propio de la fábrica durante el descimbramiento, depende del estado en que se hallan los morteros y de su naturaleza; con las mezclas desprovistas de hidraulicidad, casi siempre empleadas antiguamente y que no hayan tenido tiempo de endurecerse antes de aflojar la cimbra, pueden producirse asientos en la clave de más de $0^{m},30$; por el contrario, el empleo del cemento, que tanta aplicación recibe hoy día en las construcciones, permite disminuir este asiento hasta anularlo, ó por lo menos á hacerlo inapreciable á los medios ordinarios de observación.

Ahora bien; durante la construcción de la bóveda y mientras permanece ésta sin cerrar, la fábrica, que no puede sostenerse por sí sola, descansa constantemente sobre la armazón de madera, y por lo tanto, participa de todos los descensos más ó ménos importantes experimentados por ésta en virtud de la carga progresiva á que se le va sometiendo. Estos descensos no presentan ningún inconveniente ínterin la mezcla no ha llegado á fraguar; la bóveda se adapta siempre á la cimbra, y el mortero, á consecuencia de su plasticidad, se comprime en algunos

trozos, cuya extremidad inferior se sostiene por medio de armazones sujetas á la cimbra, se construyen á la vez, es decir, los de arriba al mismo tiempo que los de abajo, de donde resulta por de pronto una carga mejor repartida que atenúa las deformaciones; además, dichos trozos independientes obedecen sin romperse á cualquier movimiento de la cimbra. Después de concluir la construcción de todas estas subdivisiones, se procede á rellenar los intervalos, que constituyen otras tantas claves de cierre de la bóveda, y si se deja endurecer convenientemente el mortero de estos cierres, puede conseguirse un descimbramiento que produzca un asiento insignificante. Así ha sucedido en muchos casos en que no ha sido posible apreciar la baja debida á la contracción de la bóveda.

En semejantes condiciones no hay rotación sensible sobre la junta de rotura; llega el macizo á formar un monolito, sin agrietamientos aparentes de ninguna clase, y no hay entonces dificultad en admitir que la curva de presión permanece en el núcleo central del espesor; conviene, pues, en este caso disponer dicho espesor con ensanche progresivo desde la clave hacia los arranques.

Se dirá entonces que el principio de Dupuit, relativo á la rotación alrededor de una arista de intrados, no es aplicable por completo á este caso. Es indudable que recibe entonces este principio una importante modificación; pero no puede desconocerse que en rigor se verifica siempre un asiento muy pequeño, la rotación no desaparece por completo y la curva de presión ha de aproximarse en la junta de rotura, más hacia el intrados que al trasdos. Además, un macizo ejecutado por este procedimiento con mezcla de cemento, se sale, hasta cierta punto, de las condiciones ordinarias características de una bóveda; con los distintos cierres puede conseguirse un descimbramiento propio que en gran parte se anticipe al descenso de la cimbra, y al bajar ésta permanezca el macizo sin participar de su movimiento, conservando la curva de presión la posición creada en el acto del cierre, posición que podrá hallarse más ó menos próxima al centro del espesor.

puntos, extendiéndose en otros; en resumidas cuentas, no se verifica ninguna rotura sensible en el macizo. Pero no sucede lo mismo cuando la mezcla, por su naturaleza, ha podido endurecerse antes de efectuar el cierre en la clave; se comprende que la rotación producida en la bóveda ha de ocasionar en algunas juntas grietas que dividen el macizo en trozos desprovistos de unión, y que por lo mismo, no han de hallarse en las mejores condiciones para la buena estabilidad del conjunto.

296. Es preciso, pues, atenuar en lo posible este inconveniente, observado en varias bóvedas construídas con mezcla de fraguado rápido. Indicaremos las principales precauciones que con este motivo pueden tomarse.

1.° Es conveniente dar gran rigidez á la cimbra, con objeto de evitar en lo posible su deformación, y esto dependerá principalmente del número de puntos de apoyo. Conviene, por lo tanto, desechar, siempre que las circunstancias lo permitan, la forma recogida, no debiendo recurrir á ella sino en caso de absoluta necesidad. Como prueba de la importancia que se ha atribuído á esta precaución, citaremos la cimbra del puente de *Saint-Sauveuz*, de 40 metros de luz, la cual, á pesar de tener su vértice á una altura de 61 metros sobre el fondo del barranco, ha sido sostenida en su centro por una pila de madera que descansaba sobre dicho fondo, y cuyo coste no habrá dejado de tener alguna entidad.

2.° Se recomienda también cargar la cimbra con los materiales que han de servir para la ejecución de la fábrica antes de dar principio á su empleo definitivo. Consíguese con esto realizar *á priori* el asiento que ha de sufrir esta cimbra. Pero este medio, además de ser imperfecto, ha de ocasionar siempre un gran estorbo á los operarios encargados de la construcción.

3.° El procedimiento que vamos á exponer da los mejores resultados, y constituye una interesantísima modificación introducida en la ejecución de muchos puentes modernos, en los que el cemento compone la base de la mezcla. Consiste (figura 148) en subdividir la bóveda en trozos distintos de la misma longitud del cañón y separados por pequeños intervalos. Estos

297. A una bóveda construída, según acabamos de decir, podría, al parecer, aplicarse la teoría admitida por algunos constructores, y que consiste en asimilar el macizo á un arco metálico. Pero la diferencia que existe entre la elasticidad de esta última clase de construcciones y las de fábrica, permite abrigar alguna duda sobre la exactitud de los resultados obtenidos en lo concerniente al principal objeto que persigue la teoría, y es el de precisar la posición ocupada en el interior de la bóveda por la curva de presión, á fin de deducir el máximo esfuerzo en una junta cualquiera.

El problema es de muy difícil solución bajo este punto de vista y se halla sujeto á cierta incertidumbre; afortunadamente la experiencia adquirida con los grandes puentes recientemente ejecutados, demuestra que siempre que se tomen todas las precauciones arriba indicadas, inútil será preocuparse demasiado con el trabajo máximo á que se halla sometida la fábrica, y sin inconveniente podrá emprenderse con feliz éxito la construcción de bóvedas de mucha luz. A pesar de esta incertidumbre, se hallará siempre con la suficiente aproximación la intensidad del empuje cuyo conocimiento es necesario para determinar las dimensiones de los estribos; es evidente que nos pondremos en mejores condiciones de estabilidad, si se toma por base del cálculo la curva media del espesor de la bóveda, por ser, entre las admisibles, la que tiene menos brazo de palanca, y proporciona, por lo tanto, mayor empuje.

Las grandes bóvedas modernas á que nos referimos, han sido construídas en casi su totalidad por roscas ó anillos sucesivos, subdivididos también por trozos separados. El sistema de anillos, empleado ya de antiguo, permite aligerar mucho la cimbra, que solo debe sostener entonces el peso del primero, el cual después de cerrado sirve de cimbra para los demás. Pero tratándose de obras de mucha luz, es conveniente establecer trabazón ó adarajas entre los distintos anillos, y emplear sillares ó sillarejos, que aunque sean de pequeño tamaño, estén oportunamente labrados para obtener juntas de grueso uniforme y continuas desde el intrados hasta el trasdos.

Se comprende que el sistema de roscas sucesivas ha de aumentar más la duda que puede caber sobre la traza definitiva de la curva de presión. Toma ésta por de pronto, y en el interior del primer anillo, una posición que podrá hallarse más ó menos próxima á los puntos medios de dicho anillo; pero la construcción de los demás ha de producir en la curva modificaciones que creemos difíciles de apreciar.

Véase, con motivo de este sistema, la monografía de los tres puentes de *Castelet*, de *Antoinette* y de *Lavour*, publicada en los *Annales des Ponts et Chaussées*, año de 1886.

298. Todas las fórmulas anteriormente indicadas para determinar el espesor de una bóveda en la clave, se refieren á los macizos de esta clase que entran en la composición de los puentes y deben sostener grandes sobrecargas fijas ó accidentales; pero tratándose de edificios en que no existen dichas sobrecargas, puede reducirse considerablemente el grueso de la bóveda en cuyo interior permanece la curva de presión sin estar sujeta á notables oscilaciones.

Para estos casos establece Rondelet las siguientes reglas, deducidas de la observación de un gran número de edificios.

Cuando la bóveda se halla trasdosada á nivel ó presenta aumento hacia los riñones, se dará en la clave un espesor de un cincuentavo de la luz, y en el segundo caso se aumentará en los riñones hasta vez y media el de la clave. Si la bóveda es de espesor uniforme, debe asignársele un treinta y seisavo de la luz.

Puede juzgarse fácilmente que los espesores deducidos de estas reglas, aun el último de $\frac{1}{36}$, son muy inferiores á los que se obtienen con la fórmula de M. Croisette-Desnoyers para los medios puntos, no tratándose de luces demasiado considerables, como sucede en los edificios. La igualdad de espesor procedente de esta fórmula y de las dos reglas de Rondelet, tendría lugar para una luz de 70 metros, si se considera la primera de estas reglas, y para 39 metros tomando la segunda.

299. Antes de terminar con lo que se refiere al empuje de

las bóvedas, diremos algunas palabras sobre dos teorías que han tenido gran aceptación y son, por lo tanto, muy conocidas.

Es una de ellas la de M. Mery, á quien se debe la utilísima idea de introducir la curva de presion en el estudio de resistencia de las bóvedas. Partiendo de la hipótesis de que un macizo de fábrica no ha de estar expuesto á esfuerzos de tensión, y teniendo presente la ley del trapecio, establece M. Mery que en una bóveda debe dicha curva permanecer en el núcleo central, es decir, en el tercio central del espesor. Pero caben en este núcleo una infinidad de curvas distintas, y á fin de escoger entre ellas, adopta la que, partiendo del tercio superior en la clave, pasa por el tercio inferior de la junta de rotura; con esto se coloca en las mejores condiciones de resistencia al aplastamiento compatibles con el principio adoptado, obedeciendo á la par, en lo posible, á la tendencia que presentan los macizos de esta naturaleza de abrirse en el intrados de la junta del vértice, y en el trasdos de la junta de rotura.

Pero según hemos visto, no será esta curva la que se realizará en la gran mayoría de los casos, puesto que la verdadera se sale del tercio central, aproximándose mucho al intrados en los alrededores de la junta de rotura, como lo demuestran los agrietamientos frecuentemente observados en dichas juntas después del descimbramiento.

La segunda teoría ha sido propuesta por M. Durand-Claye, y se funda en dos principios. Según el primero, exige el equilibrio de toda bóveda que la curva de presión no se salga de su espesor. Este principio cierto conduce, según saben todos los que han estudiado la teoría de que nos estamos ocupando, á la determinación de un cuadrilátero situado á proximidad de la junta del vértice, y tal, que toda ordenada ó perpendicular á dicha junta y cuyo extremo se halle en el interior del cuadrilátero, representa por su longitud la intensidad del empuje horizontal, y por su posición la que tiene este empuje. En su consecuencia, partiendo de una de estas intensidades y de la posición que le corresponde, podrá trazarse una curva de presión en la seguridad de que no saldrá del espesor del macizo.

Hasta ahora permanece la cuestión indeterminada, puesto que son infinitas las ordenadas cuyos extremos están situados en el interior del cuadrilátero, é infinitas, por lo tanto, las curvas que pueden trazarse en el espesor de la bóveda.

Para disminuir la indeterminación, admite el autor un segundo principio, en virtud del cual se necesita, para la debida resistencia del macizo, que en ningún punto del mismo se verifique una presión unitaria superior al tipo generalmente adoptado en la práctica, para cada clase de materiales. Ateniéndose á este principio, y mediante una serie de construcciones gráficas, se llega á reducir en todos sentidos la extensión del cuadrilátero arriba mencionado, y como esta reducción es tanto mayor cuanto más pequeño es el tipo de la presión unitaria, disminuyéndole convenientemente, se podrá convertir el cuadrilátero en un punto, y entonces cesa toda indeterminación, puesto que ya no es más que una la ordenada admisible, y por lo tanto, una sola la curva de presión.

Pero el segundo principio sentado por M. Durand-Claye no es exacto; está precisamente en contradicción con lo que enseña la experiencia y la teoría de M. Dupuit que hemos desarrollado, según la cual, los materiales de una bóveda se encuentran sometidos, en los sitios próximos al intrados de la junta de rotura, á presiones unitarias que superan mucho á los tipos admitidos en la práctica. Creemos inútil volver sobre la demostración de este hecho. Además, la presión unitaria asignada á las construcciones es una cantidad muy variable; se suele señalar $\frac{1}{10}$ de la resistencia al aplastamiento como una relación conveniente, pero más conveniente será aún para la estabilidad $\frac{1}{20}$ ó $\frac{1}{40}$; por otra parte, nada prueba que se rompa la piedra de las dovelas sometiéndolas á $\frac{1}{4}$, á $\frac{1}{2}$ ó más de esta misma resistencia, es decir, de la obtenida por medio de experiencias hechas con pequeños cubos, pues según dijimos, son los resultados inferiores á lo que puede soportar el mate-

rial. Se deduce de estas últimas consideraciones la dificultad de fundar un principio que debe servir de base á la teoría, sobre un elemento tan variable.

Además, la teoría de M. Durand-Claye tiene el inconveniente de exigir una serie de construcciones muy pesadas, y es por lo que, según creemos, no ha recibido gran extensión en el terreno de la práctica, prefiriéndose en general aplicar la de M. Mery, como mucho más sencilla. Por nuestra parte, daríamos por muy bien empleadas estas construcciones, si permitiesen fijar con exactitud la verdadera posición de la curva de presion, y deducir como consecuencia el trabajo á que está sometido el material en los diferentes puntos de la bóveda; pero como hemos visto, ninguna de estas dos teorías resuelve la cuestión en el sentido indicado. Parten ambas de un principio inexacto, que solo puede considerarse como un *desideratum*, pero que no está conforme con la realidad de los hechos.

ESPESOR DE LOS ESTRIBOS

300. La determinación de las dimensiones que deben asignarse á los estribos, para contrarrestar el empuje de una bóveda, constituye un problema completamente determinado y del todo análogo á los que hemos resuelto al tratar de los muros de sostenimiento.

La resultante oblicua $\sqrt{P^2 + Q^2}$ que actúa en la junta de rotura, trasmite al estribo, y como tal, debe considerarse toda la parte de macizo situada por bajo de dicha junta, una acción susceptible de descomponerse en una fuerza horizontal y otra vertical; constituye la primera de las dos componentes el empuje horizontal Q, que tiende á derribar al estribo haciéndole girar alrededor de la arista de la base; la segunda está formada por el peso P de la semibóveda, que se opone á este movimiento en unión del peso del estribo. La bóveda será estable si el momento del empuje horizontal, con respecto á la arista de giro, es inferior á la suma de momentos de los dos pesos; podrá, además, comprobarse esta estabilidad prolongando el trazado de la curva de presión hasta la base;

exige el equilibrio que esta curva esté contenida toda ella en el espesor del macizo.

Consideremos un estribo rectangular ABCD (fig. 149), suponiendo que en el punto K actúa la resultante de la presión debida al macizo superior, ó lo que es lo mismo, sus dos componentes, Q empuje horizontal de la bóveda, y P su peso con el de la sobrecarga; designemos además por

l, la distancia KB del punto de aplicación de estas fuerzas al paramento BC;

p, el peso del estribo;

g, la distancia de su centro de gravedad al mismo paramento BC;

x, la distancia EC del punto de paso de la curva de presión á la arista de giro;

y, la altura AD del estribo;

tomando los momentos con respecto á E, puede establecerse la ecuación de equilibrio

$$Qy = P\,(l - x) + p\,(g - x),$$

de donde se deduce

$$x = \frac{Pl + pg - Qy}{P + p};$$

lo que confirma la regla establecida (**55**) para hallar la distancia x, es decir, que es igual á la suma algebráica de los momentos con respecto á la arista de rotación, dividida por la suma de los pesos ó componentes verticales.

301. Si se toman las rectas BA y BC por ejes de coordenadas, considerando al mismo tiempo como variable la posición de la base CD, podrá expresarse p en función de y; la ecuación que antecede será entonces la ecuación de la curva de presión. Designando por e el espesor del estribo y por δ' la densidad de la fábrica, tendremos

$$p = \delta' e y \qquad \text{y} \qquad g = \frac{1}{2}e.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de equilibrio, resulta

$$\left(Q - \frac{e^2\delta'}{2}\right) y + e\delta' yx + Px - Pl = 0.$$

Esta ecuación es la de una hipérbola que tiene una asíntota vertical cuya posición es fácil determinar.

En efecto; puede ponerse la ecuación bajo la forma

$$Q - \frac{e^2\delta'}{2} + e\delta' x + \frac{P}{y} x - \frac{pl}{y} = 0;$$

haciendo $y = \infty$, se reduce á

$$Q - \frac{e^2\delta'}{2} + e\delta' x = 0,$$

de donde resulta

$$x = \frac{e}{2} - \frac{Q}{e\delta'},$$

para la distancia de la asíntota á la vertical BC.

Si al mismo tiempo que suponemos indefinida la altura de estribo, se considera el equilibrio estricto alrededor de la arista exterior de la base, haciendo para esto $x = 0$ en la ecuación que precede, se obtiene

$$\frac{e}{2} - \frac{Q}{e\delta'} = 0 \qquad \text{y} \qquad e = \sqrt{\frac{2Q}{\delta'}}.$$

Este valor de e representa el que debe darse á un estribo de altura indefinida para equilibrar el empuje horizontal Q de la bóveda.

A fin de hacernos cargo de la importancia de este resultado, aplicaremos la última fórmula á un ejemplo. Tómese una bóveda de medio punto y 20 metros de luz, á la que se asignará un grueso uniforme de 0,89, cantidad obtenida al aplicar la fórmu-

la de Dupuit $e = 0,20 \sqrt{A}$; adoptando 2.200 kil. para el peso del metro cúbico de fábrica, se halla que la intensidad del empuje en la clave por metro lineal de bóveda es próximamente 15.127 kil. Sustituyendo en la expresión de e los valores de δ' y de Q, resulta

$$e = 3^{m},71.$$

Este resultado indica la posibilidad de oponerse al giro, dando al estribo un espesor de $3^{m},71$, aunque la altura sea indefinida. Pero es evidente que para la debida estabilidad de la construcción, es necesario aumentar este espesor, partiendo de un coeficiente que, por ejemplo, podría tomarse igual á 2, lo cual equivale á duplicar el valor 15.127 kil. hallado para el empuje. Se obtiene entonces

$$e = 5^{m},24.$$

302. Debe advertirse, que aunque la altura del estribo no sea indefinida, si fuera sin embargo algo considerable, no podría admitirse en la práctica el espesor de $5^{m},24$; tiene éste que considerarse como insuficiente, por causa de las fuertes presiones que se verifican en la base y cuya intensidad aumenta notablemente con la altura, y por tanto, con el peso del pilar. La máxima presión depende también de la posición de la resultante sobre la base; si en la expresión de x se hace $e = 5^{m},24$, $\delta' = 2.200$ kil. y Q = 15.127 kil., se obtiene para la distancia de la resultante á la arista de rotación, y suponiendo la altura indefinida,

$$x = 1,31 = \frac{e}{4}.$$

Así, pues, la resultante pasa por el cuarto, lo que indica, según los principios de la ley del trapecio, que únicamente se hallan comprimidas las tres cuartas partes de la superficie de la base. Designando los pesos por ΣP, tendremos para la

presión máxima

$$\rho = \frac{2\,\Sigma P}{\frac{3}{4}e} = \frac{8}{3} \times \frac{\Sigma P}{e},$$

es decir, los $\frac{8}{3}$ de la presión media.

Se ve, pues, que si la altura del estribo fuese muy grande, se llegaría á sobrepujar el límite de resistencia al aplastamiento á que conviene someter la fábrica. Volveremos más adelante sobre el estudio de esta resistencia aplicada á los estribos de puentes; nos hemos propuesto principalmente con el ejemplo anterior demostrar, que bajo el punto de vista del giro, el espesor del estribo no crece con la misma rapidez que la altura y no necesita pasar de cierto límite.

Advertiremos que el valor de x, deducido de la ecuación de equilibrio, haciendo en ello $y = \infty$, se obtendría también de la misma ecuación, en la hipótesis de ser el empuje horizontal Q la única fuerza que actúa en la parte superior del estribo, lo cual equivale á hacer $P = 0$. La ecuación modificada será

$$Q - \frac{e^2\delta'}{2} + e\delta' x = 0,$$

é indica que la curva de presión es una recta vertical situada á una distancia del paramento

$$x = \frac{e}{2} - \frac{Q}{e\delta'}.$$

Puede también obtenerse gráficamente este resultado; en efecto, si subdividimos el estribo en varias hiladas (fig. 150), las alturas AD_1, AD_2, AD_3 ....., serán proporcionales á los pesos de los diferentes macizos á partir de arriba, y como el empuje es constante, resulta evidente que las resultantes AE_1, AE_2, AE_3, ..., cortarán á las respectivas bases en los puntos E_1, E_2, E_3 ....., situados todos sobre una misma recta vertical.

303. Ocupémonos ahora de los otros dos movimientos que pueden afectar á la estabilidad del estribo, y son los de deslizamiento y de aplastamiento.

El empuje horizontal de una bóveda tiende á hacer resbalar el estribo sobre su base, ó una parte de este macizo á partir de arriba sobre una sección horizontal cualquiera, movimiento que se halla contrarrestado por el rozamiento que desarrollan, sobre esta base ó sobre la sección, los pesos situados encima. Exige el equilibrio que se verifique

$$Q < f\,\Sigma P \qquad \text{ó} \qquad f > \frac{Q}{\Sigma P}.$$

Designa f el coeficiente de rozamiento, y ΣP la suma de los pesos, comprendiendo el de la bóveda con su sobrecarga y el del estribo.

Sucede casi siempre en la práctica que se verifica esta desigualdad para la base inferior del estribo, exceptuando el caso poco frecuente en que dicha base descansa sobre un terreno arcilloso y húmedo; convendría entonces averiguar si, teniendo en cuenta el coeficiente de rozamiento aplicable á este terreno, no podría temerse el resbalamiento, á fin de tomar al efecto las debidas precauciones para evitarlo.

Si admitimos que el estribo está formado por hiladas de sillería que presenten juntas continuas en toda la sección horizontal del macizo, cabe indagar si alguna de estas hiladas no se presta más que otras al deslizamiento. Pero será este movimiento tanto menos temible, cuanto más baja se encuentra la hilada que se considere, pues á medida que se desciende aumenta el peso situado encima, y por lo tanto, el rozamiento proporcional á este peso. Las juntas de hilada llevan interpuesto el mortero, cuya cohesión se añade al rozamiento, para el cual, según vimos en el primer capítulo (**4**), podrá tomarse la unidad como coeficiente mínimo; equivale esto á decir que la estabilidad de deslizamiento queda asegurada para una sección cualquiera, cuando la suma de los pesos que cargan sobre ella tiene un valor superior á la intensidad del empuje.

Este es relativamente considerable en los puentes muy rebajados, y convendrá en semejantes casos comprobar las condiciones de estabilidad para las hiladas superiores. Trasmitiéndose el empuje á los estribos por medio de cojinetes de sillería, será necesario que su intensidad no supere al peso de la semibóveda con sobrecarga, al que se añadirá el peso de toda la fábrica situada encima de la base del cojinete. Se concibe que siempre será fácil conseguir este resultado aumentando la altura de esta fábrica, es decir, prolongando el estribo suficientemente hacia arriba. En el puente de Darlaston (Inglaterra), se ha querido evitar el deslizamiento continuando el aparejo de la bóveda en el interior del estribo. Creemos que este medio, bastante costoso, puede sustituirse ventajosamente con una simple sobrecarga de mampostería.

El coeficiente de rozamiento, que para juntas continuas de sillería hemos tomado igual á la unidad, será con más motivo admisible si, como sucede casi siempre, el macizo del estribo es de mampostería ordinaria, formada con mampuestos irregulares unidos con buena mezcla y presentando trabazón en todos sentidos.

304. La resistencia que ofrece un estribo de puente al aplastamiento de los materiales componentes, se determina con facilidad en cuanto se ha prolongado el trazado de la curva de presión hasta su base. Las distancias horizontales de esta curva al paramento opuesto al empuje permiten, aplicando la ley del trapecio á las divesas secciones ó planos de asiento, obtener la máxima presión unitaria en las aristas. Por lo regular se calculan las dimensiones de los estribos teniendo preferentemente en cuenta el movimiento de giro; si para este cálculo se ha partido de un coeficiente de estabilidad que no sea muy inferior á 2, se obtendrán las más de las veces dimensiones suficientes. Solo cuando sea grande la altura convendrá verificar si el esfuerzo de compresión no excede del límite impuesto por la experiencia para la fábrica de que se compone el macizo, lo cual exija acaso alguna modificación en el perfil del estribo. Podría entonces efectuarse dicha modificación sin necesidad

de aumentar el volumen de fábrica, bastando dar al paramento en contacto con las tierras un talud, ya sea continuo, ya dispuesto por retallos. Con frecuencia se observa en los puentes esta disposición muy racional.

305. Daremos cuenta de una observación que hace M. Dupuit, con motivo de la resistencia de los macizos de fábrica, refiriéndose á toda clase de obras, lo mismo á los estribos de los puentes, que á los muros de sostenimiento.

Hemos visto que cuando la resultante de las presiones corta á la base de un macizo á una distancia de la arista de giro menor que el tercio de esta base, una parte de su latitud, hacia la extremidad opuesta, se halla sometida á una contrapresión, con tendencia á producir una grieta. Así, por ejemplo, si después de trazar la curva de presion MN'N en el macizo ABCD (fig. 151), se llevan sobre los diversos planos de asiento, reales ó ficticios, las longitudes NF , N'F'....., iguales al duplo de las distancias respectivas CN , C'N'....., se podrán unir los puntos FF'E por una curva que determina la parte DFF'E , que tiende á separarse del resto del muro, sobre todo en el caso de prescindir de la cohesión del mortero. Si la separación se verifica realmente, la resistencia del estribo á los esfuerzos que sobre él actúan se halla reducida á la que presenta el volumen ABCFE , y este nuevo macizo de menor tamaño dará evidentemente lugar al trazado de otra curva de presión más próxima al paramento BC; ésta á su vez indicará que debe quitarse de la parte resistente una nueva cantidad. El resultado podrá motivar una modificación de las disposiciones primitivamente adoptadas para el estribo, siempre y cuando dicha parte resistente no ofrezca suficientes dimensiones. De lo que antecede deduce M. Dupuit como consecuencia la necesidad de disponer la sección vertical del macizo, de manera que en ningún punto se aproxime la curva de presión al paramento en contacto con las tierras, de una cantidad inferior al tercio de ancho de cada hilada.

Ha podido verse la importancia que hemos atribuido á esta condición al tratar de los muros de contención de agua; la juz-

gábamos entonces indispensable á fin de evitar la introducción del líquido en la fábrica, así como las filtraciones; pero no creemos sea necesario imponerla con tanto rigor para otra clase de construcciones, pues el desprendimiento de una parte del macizo no puede admitirse en absoluto sino haciendo caso omiso de la cohesión del mortero. Como esta cohesión no es nula, si se le atribuye, según indican algunos autores, el valor de un kilogramo por centímetro cuadrado de sección, sería preciso para que el macizo EFD se desprendiera, que su altura fuese por lo menos de 8 á 10 metros, ó que la altura media entre los puntos E y F midiese de 4 á 5 metros. Esta última altura es la de un prisma cuyo peso puede estar sostenido por la fuerza del mortero.

Además, los estribos de los puentes están sometidos al empuje de los terraplenes que constituyen las avenidas de la obra. Al calcular las dimensiones de los estribos suele por lo regular prescindirse de este empuje, con objeto de colocarse en mejores condiciones de estabilidad; pero no puede desconocerse la existencia de esta fuerza, que obrando en sentido contrario al empuje de la bóveda, modifica la curva de presión, alejándola del paramento situado en contacto con las tierras.

ESPESOR DE LAS PILAS

306. Los empujes iguales y contrarios de dos bóvedas contiguas de igual forma y dimensiones se destruyen, y la pila que las sostiene solo se halla sometida al peso de las dos semibóvedas con su sobrecarga. La curva de presión se reduce en la pila á una recta vertical que se confunde con el eje, y se obtiene la presión unitaria, que es uniforme, dividiendo el peso por el area de la sección horizontal de la pila.

En la práctica se da á la parte superior de las pilas y al nivel de los arranques un ancho mínimo igual al duplo del espesor asignado á las bóvedas, y este ancho límite, necesario para recibir las caídas de los arcos, da lugar, en general, á presiones unitarias inferiores á los tipos de 6 y 8 kilogramos,

que por lo regular se imponen como máximo para la mampostería ordinaria. Sin embargo, conveniencias estéticas motivan muchas veces un aumento en el ancho anteriormente indicado; por la misma razón se da también á la pila un ligero talud, lo cual ofrece además la ventaja de ensanchar la base inferior sometida á mayor carga que la superior. Este ensanche, que se obtiene igualmente por medio de zócalos ó retallos, es de gran necesidad cuando la pila descansa sobre un macizo de hormigón, pues este material no debe por lo regular hallarse sometido á presiones superiores á 4 ó 5 kilogramos por centímetro cuadrado; en algunos casos habrá también necesidad de limitar dichas presiones á cifras aún más pequeñas, si el suelo de la fundación es poco resistente.

Cuando las pilas presentan mucha elevación, como sucede en los grandes viaductos, es indispensable darles talud; éste se adopta también en los paramentos que corresponden á los planos de frente, disponiendo asimismo en la parte inferior tajamares cuya altura es la de las grandes crecidas.

307. El ancho que conviene dar á las pilas puede relacionarse con una cuestión de que vamos á ocuparnos. Cuando un puente está formado por un gran número de arcos iguales, separados por medio de apoyos, cuyos espesores no les permiten resistir como estribos, según sucede generalmente, conviene, bajo el punto de vista de la economía, reducir en cuanto sea posible el número de cimbras necesarias para la ejecución de la obra. Se comprende que ha de influir en este número la rapidez con que se quería llevar la construcción; pero haciendo abstracción de la cuestión de tiempo, el resultado solo dependerá del ancho de las pilas.

Considérense (fig. 152) una serie de arcos iguales 1, 2, 3 ..., y supongamos que el primero está concluído y descimbrado, mientras que el segundo, aunque cerrado en la clave, descansa todavía sobre su cimbra. Llamemos

P, el peso de una semibóveda;

p, el peso de una cualquiera de las pilas, que suponemos iguales;

e, el ancho de estas pilas;

h, su altura;
Q_1, el empuje horizontal de una bóveda.

Como admitimos que los apoyos intermedios no tienen suficiente latitud para servir de estribos, resulta que la pila número 1 no podrá oponerse completamente al empuje Q_1 de la primera bóveda; una parte de este empuje, que designaremos por Q_2, se trasladará á la segunda bóveda, de la cual recibirá una reacción equivalente. La ecuación relativa al equilibrio de giro alrededor de la arista A_1 de la primera pila, es

$$Q_1 h = e\left(P + \frac{p}{2}\right) + Q_2 h. \qquad [a]$$

Para establecer esta ecuación, conviene observar: 1.° Que el empuje Q_1 de la primera bóveda y la reacción Q_2 de la segunda, que se suponen actuar en la parte superior de la pila, lo hacen con un brazo de palanca h. 2.° Que el peso P de la primera semibóveda, trasladado también á dicha parte superior, tiene por brazo de palanca el espesor e. 3.° Que el momento de la pila es $\frac{ep}{2}$. 4.° Y por último, que la segunda bóveda, que descansa sobre su cimbra, no produce ningún empuje.

El esfuerzo Q_2 se trasmite á la segunda pila por el intermedio de la segunda bóveda, que suponemos cerrada en la clave, pues de no ser así, se verificaría la trasmisión por la cimbra, y en malas condiciones por causa de la flexibilidad inherente á la armazón de madera. Se tendrá, pues, para el equilibrio alrededor de la arista A_2, y aunque no se halle construída la bóveda núm. 3,

$$Q_2 h = e\left(P + \frac{p}{2}\right); \qquad [b]$$

añadiendo las ecuaciones [a] y [b], resulta

$$Q_1 h = 2e\left(P + \frac{p}{2}\right) \quad \text{y} \quad e = \frac{Q_1 h}{2\left(P + \frac{p}{2}\right)}.$$

Este último valor de e es el que debería darse á las pilas para el equilibrio de las dos primeras bóvedas.

Obsérvase que para oponerse al empuje de la primera bóveda es preciso asignar al estribo un grueso E, deducido de la ecuación

$$Q_1 h = E\left(P + \frac{p_1}{2}\right),$$

en la que p_1 designa el peso de este estribo, se deduce

$$E = \frac{Q_1 h}{P + \frac{p_1}{2}}.$$

Esto indica que si la pila tuviese igual peso que el estribo, se verificaría $E = 2e$; pero como el primer peso es inferior al segundo, resulta que el ancho del estribo no llega del todo á ser el duplo del de la pila.

En cuanto se hayan fijado las dimensiones de las pilas, sosteniendo una serie de arcos, podrán determinarse sus pesos, y si el ancho asignado es superior al que se deduce de la expresión $e = \dfrac{Q_1 h}{2\left(P + \frac{p}{2}\right)}$, el conjunto de las dos primeras bóvedas estará en equilibrio. La cimbra que ha servido para la primera bóveda podrá aplicarse á la construcción de la tercera, y solo se necesitarán dos de estas cimbras, sea cual fuese el número de arcos.

Pero si el ancho dado á la pila es menor que el indicado por la expresión de e, el equilibrio de las bóvedas números 1 y 2 no podrá subsistir, será preciso que la tercera bóveda esté cerrada y descanse sobre su cimbra; una parte del empuje Q_2, que llamaremos Q_3, ha de trasmitirse á dicha tercera bóveda, y se tendrá para el equilibrio alrededor de la arista A_2

$$Q_2 h = e\left(P + \frac{p}{2}\right) + Q_3 h, \qquad [c]$$

y para el equilibrio alrededor de A_3

$$Q_3 h = e\left(P + \frac{p}{2}\right); \qquad [d]$$

añadiendo miembro á miembro [a], [c] y [d], se halla

$$Q_1 h = 3e\left(P + \frac{p}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad e = \frac{Q_1 h}{3\left(P + \frac{p}{2}\right)}.$$

Este valor de e constituye los $\frac{2}{3}$ del ancho obtenido antes, y demuestra que con tres cimbras puede reducirse en una tercera parte la latitud de pila que exige el empleo de dos.

Se ve del mismo modo, que con cuatro se obtiene

$$e = \frac{Q_1 h}{4\left(P + \frac{p}{2}\right)},$$

y así sucesivamente para un mayor número.

Es, pues, fácil determinar el ancho mínimo que debe asignarse á las pilas, para poder construir la totalidad de las bóvedas, empleando un número menor de cimbras. Las fórmulas que dan este ancho son funciones del empuje y del peso de la semibóveda y constituyen cantidades susceptibles de calcularse, en cuanto se hayan fijado la forma y dimensiones del macizo. Pero advertiremos que en el peso P no es necesario incluir ninguna sobrecarga, pues éstas solo se establecen después del descimbramiento de la obra. Conviene observar aún, que tratándose de bóvedas completas, es decir, de arcos de medio punto ó carpaneles, debe considerarse como formando pila todo el macizo situado por bajo de las juntas de rotura.

DETERMINACIÓN DE LOS PESOS Y CENTROS DE GRAVEDAD

308. *Bóveda cilíndrica trasdosada paralelamente.*—La indagación de la junta de rotura de una bóveda completa, el

cálculo del empuje, y en fin, el trazado de la curva de presión que permite apreciar el grado de estabilidad de la obra exigen, según se sabe, la determinación del peso y del centro de gravedad de una porción de bóveda comprendida entre el vértice y una junta cualquiera. Creemos útil exponer los métodos que pueden emplearse para obtener estos datos.

Hemos visto (**280**) que llamando

θ, el ángulo que forma un radio cualquiera con la vertical (figura 153);

e, el espesor uniforme de la bóveda;

r', el radio medio de este espesor;

r'', el radio de los centros de gravedad de las dovelas elementales;

δ', la densidad de la fábrica;

se tiene para la parte de bóveda determinada por la junta correspondiente al ángulo θ,

$$P = \delta' r' e \theta,$$

y para la distancia LK del centro de gravedad al eje,

$$LK = \frac{r'' (1 - \cos. \theta)}{\theta}.$$

Tratándose de una bóveda completa, se darán á θ valores correspondientes á varios puntos de intrados, que comprendan entre sí la junta de rotura. Los diversos resultados obtenidos para LK , fijarán las posiciones de las verticales que pasan por los centros de gravedad pertenecientes á los respectivos trozos de bóveda; estas verticales cortarán á las tangentes de intrados en distintos puntos que determinan la curva de error, por medio de la cual se llega á obtener el punto charnela, según tenemos explicado (**256**).

309. Entra como factor en la expresión de LK el radio r'' de los centros de gravedad relativos á las dovelas elementales, radio que difiere muy poco del radio medio r'; hallaremos, sin embargo, su valor exacto.

Sea MNTS (fig. 154), una de estas dovelas, y designemos siempre por e el espesor de la bóveda, y por a y b la magnitud de los lados paralelos MS y NT. Divídase el trapecio en dos triángulos, cuyos momentos, con respecto á MS, son

$$\frac{ae}{2} \times \frac{e}{3} \text{ y } \frac{be}{2} \times \frac{2}{3} e;$$

añadiendo estos momentos y dividiendo la suma por el área del trapecio, se obtiene para la distancia del centro de gravedad al lado MS,

$$x = \frac{e}{3} \times \frac{a + 2b}{a + b}.$$

Si O es el punto de concurso de los planos de junta MN y ST, es decir, el centro del círculo, los lados a y b serán respectivamente proporcionales á los radios de intrados y de trasdos, que son $r' - \frac{e}{2}$ y $r' + \frac{e}{2}$; reemplazando, pues, los lados por los radios, resultará

$$x = \frac{e}{3} \times \frac{3r' + \frac{e}{2}}{2r'} = \frac{e}{2} + \frac{e^2}{12r'},$$

y tendremos para el radio de los centros de gravedad

$$r'' = r' - \frac{e}{2} + x = r' + \frac{e^2}{12r'}.$$

Este resultado confirma lo que se dijo (**280**) sobre la escasa diferencia existente entre r'' y r', pues se concibe que en una bóveda de cierta luz, el espesor de clave es pequeño con relación al radio medio, y por lo tanto, la fracción que debe añadirse á este radio medio, para obtener el de los centros de gravedad, tiene un valor muy reducido. Así, por ejemplo, para una bóveda de 10 metros de radio y un metro de espesor, la diferencia sería de $0^m,008$.

310. *Bóvedas esféricas.*—Según dijimos (**271**), se determina la estabilidad de una bóveda esférica subdividiéndola en husillos. Puede también hallarse analíticamente el peso y el centro de gravedad de un trozo de husillo comprendido entre el vértice y una junta cualquiera.

Adoptaremos las mismas notaciones, designando además por α el ángulo del husillo, es decir, el que forman los dos planos meridianos que lo terminan. Considérese (fig. 155) una sección meridiana de la bóveda que suponemos siempre trasdosada de igual espesor, y divídasela en dovelas elementales cuyas juntas se hallen infinitamente próximas; el área de una de estas dovelas será $er'd\theta$, y según el teorema de Guldin, se obtendrá su volumen multiplicando esta área por el arco de paralelo que describe su centro de gravedad al pasar de una á otra de las dos secciones meridianas del husillo. Pero el radio de este paralelo tiene por valor r'' sen. θ; el desarrollo del arco será r'' sen. $\theta \times \alpha$, y el volumen estará expresado por $er'r''$ sen. $\theta d\theta \times \alpha$. Se obtiene, pues, para el peso del husillo, desde el vértice hasta una junta cualquiera formando con el eje un ángulo θ,

$$\mathrm{P} = \delta' e r' r'' \alpha \int_0^\theta \text{sen. } \theta d\theta = \delta' e r' r'' \alpha \, (1 - \cos. \, \theta).$$

Para hallar la distancia del centro de gravedad del husillo al eje vertical de la bóveda, tomaremos con respecto á este eje los momentos de las dovelas elementales, y después de sumarlos se dividirán por el peso del husillo. El brazo de palanca de una dovela es r'' sen. θ; y su momento

$$\delta' e r' r'' \alpha \text{ sen. } \theta d\theta \times r'' \text{ sen. } \theta = \delta' e r' r''^2 \alpha \text{ sen.}^2 \theta d\theta;$$

para hacer la suma, no hay más que integrar entre 0 y θ; reemplazando sen.^{2} θ por su equivalente $\dfrac{1 - \cos. \, 2\theta}{2}$, resulta

$$\delta' e r' r''^2 \alpha \int_0^\theta \frac{1 - \cos. 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{\delta' e r' r''^2 \alpha}{4} \, (2\theta - \text{sen. } 2\theta),$$

y dividiendo por el peso, se halla para la distancia del centro de gravedad al eje

$$\frac{r'' (2\theta - \text{sen. } 2\theta)}{4 (1 - \cos. \theta)} .$$

Con auxilio de esta expresión se fijarán las verticales relativas á los centros de gravedad de diversos trozos de bóveda, á partir del vértice, que comprendan la junta de rotura, cuya posición se obtiene sin cambiar nada al procedimiento que conocemos.

311. *Bóvedas en rincón de claustro.*—Tomemos una bóveda que cubra un espacio cuadrado, y cuya sección recta sea un medio punto trasdosado de igual espesor; en semejante caso, los cálculos son análogos á los de las bóvedas esféricas. Recordemos que se han designado por r' y por r'' los radios medio y de los centros de gravedad, y por r el de intrados.

El área de una dovela elemental comprendida entre dos planos de junta infinitamente próximos (fig. 156) será siempre $er'd\theta$; la longitud de esta dovela, comprendida entre los dos planos verticales proyectados horizontalmente, según las diagonales del cuadrado, tendrá por valor $2r$ sen. θ; por último, el brazo de palanca de la dovela será r'' sen. θ. Se obtendrá, pues, para el peso de la bóveda hasta la junta correspondiente al ángulo θ

$$P = 2e\delta' rr' \int_0^\theta \text{sen. } \theta d\theta = 2e\delta' rr' (1 - \cos. \theta),$$

y para el momento total con respecto al eje

$$2e\delta' rr' r'' \int_0^\theta \text{sen.}^2 \theta d\theta = \frac{2e\delta' rr' r''}{4} (2\theta - \text{sen. } 2\theta);$$

resulta, para la distancia del centro de gravedad al mismo eje,

$$\frac{r'' (2\theta - \text{sen. } 2\theta)}{4 (1 - \cos. \theta)} ,$$

que es la misma expresión hallada para las bóvedas esféricas.

312. *Bóvedas de arista.*—Admitimos siempre que la planta de la bóveda es cuadrada, y que las secciones correspondientes á los planos de los frentes son medios puntos con trasdos paralelo. Conservaremos las notaciones anteriores, y designaremos además por l el ancho TS ó T'S (fig. 157), de cualquiera de los cuatro pilares que sostienen la bóveda. Se compone ésta de cuatro partes iguales, formando cada una, en proyección horizontal, un pentágono.

El área de una dovela elemental tiene por valor $er'd\theta$; si M es el punto de intrados que corresponde á la dovela, la longitud de hilada estará representada por las líneas

$$\text{MN} = \text{M'N'} = \text{M'N''},$$

y tendremos para su longitud

$$\text{MN} = r + l - r \text{ sen. } \theta,$$

y para el peso relativo á la mitad de una de las cuatro bóvedas, desde el vértice hasta una junta que forma con la vertical el ángulo θ,

$$\text{P} = \int_0^\theta \delta' er' d\theta (l + r - r \text{sen.} \theta) = \delta' er' \left[(l + r)\theta + r(\cos.\theta - 1) \right].$$

El brazo de palanca de la dovela elemental es r'' sen. θ, y la suma de momentos tendrá por expresión

$$\delta' er' \int_0^\theta (l + r - r \text{ sen. } \theta) \, r'' \text{ sen. } \theta d\theta$$

$$= \delta' er' \int_0^\theta (l + r) \, r'' \text{ sen. } \theta d\theta - rr'' \text{ sen.}^2 \theta d\theta$$

$$= \delta' er' \left[r'' \, (l + r) \, (1 - \cos. \theta) - \frac{rr''}{4} (2\theta - \text{sen. } 2\theta) \right],$$

y la distancia del centro de gravedad de la bóveda al eje, será

$$r'' \frac{(l+r)(1-\cos.\theta)-\frac{r}{4}(2\theta-\text{sen}.\,2\theta)}{(l+r)\,\theta+r\,(\cos.\,\theta-1)}.$$

Con esta expresión se fijarán las posiciones de varios centros de gravedad y después el punto de rotura, así como la intensidad del empuje Q de una semibóveda.

313. *Procedimientos gráficos.*—Los métodos que anteceden, puramente analíticos, suponen que la bóveda tiene una sección recta circular trasdosada paralelamente. Cuando el espesor de la bóveda aumenta hacia los riñones, ó cuando actúa sobre ella una sobrecarga á la que es preciso atender, no son ya aplicables dichos métodos para hallar el peso y el centro de gravedad del macizo. Se recurre entonces á los procedimientos gráficos que expondremos.

En la mayoría de los casos, el objeto principal que se trata de conseguir, consiste en hallar la intensidad del empuje de la bóveda, no existiendo gran interés en trazar con mucha exactitud la curva de presión; además, nunca puede ser muy riguroso el trazado con motivo de la incertidumbre que afecta á la posición de los puntos de paso en la clave y en la junta de rotura; de aquí resulta que la curva obtenida no podrá servir para averiguar la máxima presión unitaria á que se encuentra sometida la piedra en distintos puntos de la bóveda. En semejante caso, es perfectamente admisible el procedimiento que vamos á indicar.

La bóveda ABDC (fig. 158), se halla trasdosada de un modo cualquiera, según AC; puede comprender este trasdos el macizo de mampostería que se coloca en los riñones sobre la parte adovelada. Existe además un relleno de tierra hasta la horizontal EF , que corresponde á la rasante del camino. Trácense una serie de rectas verticales equidistantes, que subdividan la sección FEBD en fajas de igual ancho, el cual se tomará lo suficientemente pequeño para que los arcos intercep-

tados en el intrados puedan reemplazarse sin grave error por su cuerda. Será después fácil reducir la longitud de las verticales, entre el trasdos AC y la horizontal EF, en la relación existente entre las densidades de la tierra y de la piedra, dando por resultado esta reducción una línea tal como E'F', que puede considerarse como limitando por arriba el macizo F'E'BD de una densidad uniforme é igual á la de la fábrica. Se hallará, pues, dividido el macizo en cierto número de trapecios, cuyas bases paralelas están á igual distancia, reduciéndose el problema á determinar el peso y el centro de gravedad de un grupo de trapecios, contado desde la clave hacia los arranques.

Para esto, divídase cada trapecio en dos triángulos, y obsérvese que cada par de éstos, por tener su vértice en una misma vertical, ya sea del lado del trasdos ficticio E'F', ya en el intrados BD, forma un conjunto compuesto de dos áreas iguales, conjunto cuyo centro de gravedad se halla en dicha vertical. Por lo tanto, si designamos por $l, l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$, las longitudes de las verticales comprendidas entre E'F' y BD, y por c la distancia constante entre estas verticales, tendremos para el peso del macizo hasta la vertical l_n,

$$P = \delta' c \left[\frac{1}{2} (l + l_n) + l_1 + l_2 + \ldots\ldots + l_{n-1} \right],$$

y para la suma de momentos referidos al eje vertical

$$\delta' c^2 \left[\frac{l + (3n-1) l_n}{6} + l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \ldots + (n-1) l_{n-1} \right];$$

por lo tanto, la distancia del centro de gravedad al eje estará expresada por

$$c \, \frac{\frac{1}{6} \left[l + (3n-1) l_n \right] + l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \ldots + (n-1) l_{n-1}}{\frac{1}{2} (l + l_n) + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_{n-1}}.$$

Obsérvase que en la segunda de estas tres expresiones, el término $\frac{l + (3n - 1) l_n}{6}$ multiplicado por c^2, representa la suma de momentos del primero y del último triángulo; tiene el primero por área $\frac{1}{2} cl$ y por brazo de palanca $\frac{1}{3} c$, lo que da $\frac{1}{6} c^2 l$ para su momento; el área del segundo es $\frac{1}{2} cl_n$, su brazo de palanca $nc - \frac{1}{3} c = \frac{1}{3} c (3n - 1)$, y resulta para el momento $\frac{1}{6} c^2 (3n - 1) l_n$.

Si suponemos que se trata de una bóveda de medio punto, se empezará por indagar la posición de la junta de rotura tomando varios grupos de trapecios á partir de la clave, y tales, que sus extremidades comprendan dicha junta; después de fijar los centros de gravedad de estos grupos, se hará el trazado de la curva de error, terminando la operación según se tiene indicado (**256**).

314. El procedimiento que acabamos de exponer, partiendo de una subdivisión del macizo por planos verticales, acaso parezca á primera vista algún tanto inexacto, puesto que hallándose aparejada la bóveda por juntas normales al intrados, la rotura producida por la rotación no puede verificarse sino siguiendo una de estas juntas, tales como CD (fig. 159), y luego según CF. Pero como la dirección vertical asignada dentro del macizo de sobrecarga, por más que parezca lógica, no se halla completamente confirmada por la experiencia, podrá muy bien suceder que no se obtengan con la línea quebrada DCF resultados mucho más aproximados á la verdad que si se adoptara la recta DJ. Además, tratándose de una bóveda de gran luz, la diferencia FCDJ que existe entre las dos áreas EFCDB y EJDB , es pequeña con relación á las mismas, y sus centros de gravedad casi se han de confundir. Se concibe que la posición del punto de rotura, y la intensidad del empuje obtenidos por uno cualquiera de estos dos sistemas de subdivi-

sión serán, con muy corta diferencia, los mismos. El trazado de la curva de presión podrá también presentar algunas ligeras variaciones, pero no tendrán éstas importancia en las condiciones de estabilidad del macizo con respecto al giro.

Puede también hacerse la subdivisión por verticales tomando arcos de igual longitud en el intrados, pero entonces la latitud de los trapecios obtenidos no es constante y disminuye á medida que se separan de la clave. La operación es algo menos sencilla; se dividen siempre los trapecios en triángulos, pero hay que calcular el área y los momentos de éstos, uno después de otro. La latitud variable de los trapecios se obtiene fácilmente por medio de las tablas trigonométricas naturales, puesto que representa la diferencia de los senos relativos á ángulos conocidos.

La subdivisión por dovelas verticales puede aplicarse también al caso en que la bóveda tiene un espesor constante y carece de sobrecarga; pero entonces si el intrados es circular y no se quieren utilizar las expresiones analíticas, será más sencillo subdividir la bóveda en dovelas iguales con planos de junta normales al intrados. El centro de gravedad de cada dovela se halla sobre el radio que la divide en dos partes iguales á una distancia del intrados fácil de determinar, é igual para todas; estará, pues, situada sobre un mismo arco de círculo, á distancias del eje que llamaremos $g_1, g_2, g_3 \ldots\ldots$

Si s es el área de una dovela, tendremos para el peso de un número n de éstas

$$\mathrm{P} = \delta' n s,$$

y para la suma de momentos

$$\Sigma \mathcal{M} = \delta' s\,(g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n).$$

Por último, la distancia al eje del centro de gravedad relativo al conjunto, será

$$\frac{g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_n}{n}.$$

Siempre que por más exactitud se quiera adoptar, en el caso general, la subdivisión por líneas quebradas, formando dovelas con juntas normales al intrados en la parte de aparejo, y fajas verticales sobrepuestas á estas dovelas en la sobrecarga, deberá fijarse la posición ocupada por el centro de gravedad de cada subdivisión, empezando por resolver el mismo problema para las distintas figuras elementales de que se compone, tales como cuadriláteros, trapecios, coronas, etc. Recordaremos con este motivo los medios que pueden emplearse.

315. *Cuadrilátero.*—Para hallar el centro de gravedad de un cuadrilátero cualquiera ABCD (fig. 160), se trazará una diagonal DB, cuyo punto medio E debe unirse con los otros dos vértices A y C; después de tomar sobre las rectas EA y EC los puntos N y M situados al tercio de su longitud respectiva, no habrá más que llevar sobre la recta NM la distancia NG, igual á la parte KM de dicha recta interceptada por la diagonal DB; el punto G será el centro de gravedad que se busca.

En efecto; los puntos N y M señalan los centros de gravedad de los triángulos ADB y CDB, puesto que se hallan al tercio de las rectas que unen los vértices con el medio de la base opuesta; resulta, pues, que el centro de gravedad relativo al conjunto de los dos triángulos, será el punto de la recta NM, que la divide en dos partes inversamente proporcionales á las áreas ADB y CDB. Pero en virtud de la base común DB, son dichas áreas proporcionales á las respectivas alturas AT y CS, y éstas á su vez se hallan en la misma relación que las partes AJ y JC de la diagonal AC, interceptadas por DB. Además, como NM y AC son paralelas, esta misma relación existirá también entre NK y KM; por lo tanto, haciendo NG igual á KM, las longitudes NG y GM se hallarán en relación inversa de las áreas ADB y CDB, y el punto G será el centro de gravedad del cuadrilátero, que es lo que debía demostrarse.

316. *Trapecio.*—Si el cuadrilátero tiene dos lados paralelos, puede obtenerse el centro de gravedad por otros medios. Este

centro debe encontrarse evidentemente sobre la recta EF (figura 161), que une los puntos medios de las dos bases paralelas, y divide también en dos partes iguales á todas las rectas paralelas á estas bases. Además, si se considera dividido el trapecio en dos triángulos ABD y BDC, los centros de gravedad M y N de estos triángulos se hallarán al tercio de las longitudes EB y FD, á partir de las bases; por lo tanto, el centro de gravedad del cuadrilátero será un punto de la recta MN; estará, pues, situado en la intersección de esta recta con EF.

Al ocuparnos del centro de gravedad relativo á una bóveda circular trasdosada paralelamente, vimos (**309**) que en un trapecio definido por sus bases de longitudes a y b y por su altura e, se hallaba este centro á una distancia de la base a, expresada por

$$x = \frac{1}{3} e \frac{a + 2b}{a + b};$$

designando por y la distancia del centro á la base b, podremos reemplazar x por $e - y$, con lo que resulta

$$y = \frac{1}{3} e \frac{b + 2a}{a + b};$$

por lo tanto, la relación entre las dos distancias, será

$$\frac{x}{y} = \frac{2b + a}{2a + b} = \frac{b + \frac{1}{2} a}{a + \frac{1}{2} b}.$$

Se deduce de esta relación un procedimiento gráfico que fija el centro de gravedad del trapecio. Consiste en llevar sobre la prolongación de BC una longitud CI igual á la base AD, y sobre la prolongación de AD, pero en sentido inverso, la longitud AL igual á BC; únanse luego los puntos I, L, por medio de una recta, y ésta cortará á la mediana EF en el punto G que se quiere determinar.

En efecto; las longitudes EL y FI son respectivamente iguales á $b + \frac{1}{2} a$ y á $a + \frac{1}{2} b$; por lo tanto, la mediana EF se halla dividida por LI en la relación de estas longitudes. Lo mismo sucederá con la perpendicular á las bases tirada por G. Este punto se encuentra, pues, situado á las distancias de las bases que señala la mencionada relación.

En muchos casos es suficiente hallar la vertical que pasa por el centro de gravedad de un trapecio, cuyas bases paralelas son también verticales. Divídase entonces el lado AB en tres partes iguales AS = ST = TB; luego por s se traza una paralela á la diagonal DB del trapecio, y por T una paralela á la diagonal CA. El punto O de encuentro de las dos paralelas pertenece á la vertical OG que se busca.

En efecto; los dos triángulos SOK y TOK son respectivamente semejantes á los triángulos ABD y ABC, y dan lugar á las proporciones

$$\text{SK} : \text{KO} :: \text{AB} : \text{DA}$$

$$\text{TK} : \text{KO} :: \text{AB} : \text{CB}.$$

Estas dos proporciones tienen iguales los términos medios, y de ellas se deduce

$$\text{SK} : \text{KT} :: \text{CB} : \text{DA},$$

lo que indica que la distancia ST queda dividida por la vertical en dos partes inversamente proporcionales á las bases AD y BC del trapecio, ó inversamente proporcionales á las áreas de sus dos triángulos componentes ABD y BDC. En la misma proporción inversa quedará también dividida por dicha vertical la línea MN que une los centros de gravedad de estos dos triángulos; por lo tanto, queda demostrado que la vertical del punto O pasa por el centro de gravedad del trapecio.

317. *Arco de circulo.*—Supongamos que el arco ACB (figura 162) está dividido en dos partes iguales por el radio OC, y consideremos un elemento de arco situado sobre OM que

forme con OC un ángulo θ; la longitud de este elemento será $rd\theta$, y su brazo de palanca con respecto á ON perpendicular á OC, tendrá por valor $MN = r \cos. \theta$; por lo tanto, el momento del elemento estará dado por $r^2 \cos. \theta d\theta$, y la suma de momentos del arco ACB, será

$$\int_{-\theta}^{+\theta} r^2 \cos. \theta d\theta = 2r^2 \operatorname{sen.} \theta.$$

El centro de gravedad se hallará sobre el radio OC, á una distancia del centro O expresada por

$$OG = \frac{2r^2 \operatorname{sen.} \theta}{2r\theta};$$

pero $2r \operatorname{sen.} \theta$ es el valor de la cuerda AB, que designaremos por c, y $2r\theta$ representa el arco ACB, que llamaremos a; resulta, pues,

$$OG = r\frac{c}{a},$$

lo que indica, que el centro de gravedad de un arco de círculo se halla sobre el radio que lo divide en dos partes iguales y á una distancia del centro igual al producto del radio multiplicado por la relación entre la cuerda y el arco.

318. *Sector.*—Dividiremos el sector en elementos triangulares comprendidos entre dos radios infinitamente próximos; el centro de gravedad de cada elemento estará situado á los dos tercios del radio á partir del centro; por lo tanto, si con una longitud igual á $\frac{2}{3}r$ (fig. 163), se describe un nuevo arco A′B′, éste ha de pasar por los centros de gravedad de todos los elementos de que se compone el sector AOB, y el centro de gravedad de este sector será el del arco A′B′, es decir, que tendrá por valor

$$OG = \frac{2}{3} r \frac{c}{a}.$$

Debe, pues, hallarse sobre el radio medio á una distancia del centro igual á los dos tercios del producto que se obtiene multiplicando el radio del sector por la relación entre la cuerda y el arco.

319. *Corona.*—Consideraremos la parte comprendida entre dos radios OA y OB (fig. 164). Si r'' designa el radio del círculo A′B′ que pasa por los centros de gravedad de los trapecios elementales en que puede subdividirse la corona, el centro de gravedad de esta última será el que corresponde al arco A′B′, y su distancia al centro tendrá por expresión

$$OG = r'' \frac{c}{a};$$

pero vimos (**309**) que entre r'', el radio medio r' y el espesor e de la corona, existe la relación

$$r'' = r' + \frac{e^2}{12r'},$$

por lo tanto, resulta para la distancia OG

$$OG = \left(r' + \frac{e^2}{12\,r'}\right)\frac{c}{a}.$$

320. *Dovela con sobrecarga.*—Aplicando los procedimientos indicados á una dovela CDFE (fig. 165) y á la faja vertical que tiene sobrepuesta, se fijarán los centros de gravedad g y g' de cada una de estas figuras; si se llevan luego sobre dos paralelas gN y g'M dos longitudes proporcionales á las áreas ABDC y CDFE, pero en sentido contrario, es evidente que el punto G de intersección de las rectas gg' y NM dará el centro de gravedad relativo al conjunto de las dos figuras, puesto que en relación inversa de las mismas queda dividida la primera de dichas dos rectas.

El método que antecede exige la sustitución de superficies por longitudes que les sean proporcionales. Recordaremos con este motivo los siguientes procedimientos muy sencillos.

321. *Representación de superficies por longitudes.*—Si se consideran varias superficies, definidas cada una por dos factores $a \times b$, $a' \times b'$, $a'' \times b''$ ... y se reemplazan por otras respectivamente equivalentes $c \times x$, $c \times x'$, $c \times x''$, ... pero teniendo un factor común c, es evidente que las primeras serán proporcionales á los factores variables x, x', x'' ..... de las segundas. Deberán verificarse las igualdades

$$a \times b = c \times x, \quad a' \times b' = c \times x', \quad a'' \times b'' = c \times x'' \ldots,$$

y se reduce el problema á hallar una cuarta proporcional á tres longitudes conocidas a, b, c, ó a', b', c, etc.

Sobre los lados de un ángulo cualquiera (fig. 166), y á partir del vértice, se llevarán dos longitudes OA y OB iguales á los factores a y b; señálase también sobre uno de los lados, OB por ejemplo, la longitud OC, representativa en la misma escala del factor constante c; uniendo C con A, y trazando por B la recta BX paralela á AC, la longitud OX dará la cuarta proporcional buscada, puesto que se verifica

$$\frac{\mathrm{OX}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}} \text{ ó } \mathrm{OX} \times \mathrm{OC} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \text{ ó } \mathrm{OX} \times c = a \times b.$$

Puede también operarse como sigue: sobre una recta cualquiera y á partir de un punto M (fig. 167), se llevarán en sentido contrario dos distancias MA y MB, respectivamente iguales á los factores a y b; tomando AB como diámetro descríbase una semicircunferencia, que quedará cortada en N por la perpendicular á AB levantada en M. A partir de M se llevará sobre el diámetro la longitud MC igual al factor c; uniendo N y C y trazando después NX perpendicular á NC, se obtiene la distancia MX para la cuarta proporcional.

En efecto; la perpendicular NM al diámetro es media proporcional entre los dos segmentos MA, MB, y se verifica

$$\overline{\mathrm{NM}}^2 = \mathrm{MA} \times \mathrm{MB}.$$

Esta misma ordenada NM constituye la perpendicular bajada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo por el vértice opuesto; es, pues, también media proporcional entre las dos partes MC y MX de dicha hipotenusa, lo que da

$$\overline{NM}^2 = MC \times MX,$$

y resulta de las dos ecuaciones que anteceden

$$MC \times MX = MA \times MB \qquad ó \qquad MX \times c = a \times b.$$

322. *Resultante de fuerzas paralelas.*—Sabemos ya cómo se determina el centro de gravedad de una subdivisión de la bóveda, sea que se componga solo de una dovela con juntas normales al intrados, ó bien de la misma con faja vertical de sobrecarga. Si se toma con la escala la distancia g del centro de gravedad, de una subdivisión al eje vertical de la bóveda, y se designa además por a el área de esta subdivisión, tendremos para la distancia al mismo eje del centro de gravedad relativo al conjunto de cierto número de subdivisiones

$$x = \frac{\Sigma\, ag}{\Sigma\, a}.$$

El peso de la parte correspondiente de bóveda será

$$P = \delta' \times \Sigma a,$$

y se tendrán los elementos necesarios para determinar la posición del punto de rotura, así como la intensidad del empuje, pudiendo efectuarse después el trazado de la curva de presión.

Pero para hallar la posición de la vertical que pasa por el centro de gravedad perteneciente á un grupo de dovelas ó de subdivisiones, puede también emplearse un método completamente gráfico, y que creemos oportuno dar á conocer.

Supongamos que el número de subdivisiones es de cuatro, y sean P_1, P_2, P_3, P_4 (fig. 168), las verticales que pasan por sus respectivos centros de gravedad; sobre la primera de estas verticales, y á partir de un punto cualquiera A_1, llévese una longitud A_1B_1 proporcional al peso p_1 de la primera subdivisión; por el mismo punto A_1 y en una dirección arbitraria, se trazará una recta, sobre la que se marcará una longitud A_1C_1, también arbitraria, y representativa de una fuerza auxiliar cualquiera; construyendo el paralelógramo de las fuerzas A_1B_1 y A_1C_1, se obtiene una resultante A_1D_1, que se trasladará sobre su prolongación en A_2C_2, y á partir del punto de encuentro A_2 con P_2. Se hace A_2B_2 proporcional al peso p_2 de la segunda subdivisión y se combina con A_2C_2, produciendo la resultante A_2D_2, que á su vez se llevará á A_3C_3. Componiendo esta última con A_3B_3, que representa p_3, se obtiene A_3D_3. Por último, esta resultante, aplicada en A_4 y combinada con el peso p_4, definido por A_4B_4, dará lugar á la fuerza A_4D_4, que es la resultante final de los cuatro pesos p_1, p_2, p_3, p_4, y de la fuerza auxiliar A_1C_1 que hemos añadido. De aquí resulta que esta fuerza y los cuatro pesos están equilibrados por A_4D_5, igual y opuesta á A_4D_4; por lo tanto, los pesos solos hacen equilibrio á las dos fuerzas A_4D_5 y A_1C_1, ó lo que es lo mismo, á su resultante, que pasa forzosamente por el punto de concurso R_4. Asi es que la resultante de los cuatro pesos, igual y contraria á la de A_1C_1 y A_4D_5, pasa por dicho punto R_4.

De la misma manera se demuestra que si no hubiese más que tres pesos en vez de los cuatro, la resultante final pasaría por el punto de intersección R_3 de la fuerza auxiliar A_1C_1 con A_3D_3; así como también la resultante de p_1 y p_2 ocuparía la posición de la vertical trazada por el punto R_2 en que se cortan A_1C_1 y A_2D_2. En resumen, la construcción que fija la resultante de un grupo cualquiera de subdivisiones, determina á la par la resultante de todos los demás grupos en menor número, á partir de la clave.

El procedimiento que acaba de exponerse equivale á consi-

derar el equilibrio de un polígono funicular $C_1A_1A_2A_3A_4D_5$, solicitado por fuerzas paralelas p_1, p_2, p_3, p_4, y por las fuerzas A_1C_1 y A_4D_5.

323. La construcción anteriormente indicada es susceptible de simplificarse. En efecto; llevando sobre una misma vertical, y á continuación unas de otras, longitudes

$$M_1M_2\ ,\quad M_2M_3\ ,\quad M_3M_4\ ,\quad M_4M_5\ ,$$

respectivamente proporcionales á los pesos ó simplemente á las áreas de las subdivisiones de la bóveda, lo que equivale á hacer

$$M_1M_2 = A_1B_1,\quad M_2M_3 = A_2B_2,\quad M_3M_4 = A_3B_3,\quad \text{y}\quad M_4M_5 = A_4B_4;$$

si luego por el punto M_1 se tira la recta MO igual y paralela á la fuerza auxiliar A_1C_1, resulta que, uniendo el punto O con los puntos M_2, M_3, M_4, M_5, se obtienen los triángulos

$$M_1OM_2\ ,\quad M_2OM_3\ ,\quad M_3OM_4\ ,\quad M_4OM_5\ ,$$

respectivamente iguales á los triángulos

$$A_1B_1D_1\ ,\quad A_2B_2D_2\ ,\quad A_3B_3D_3\ ,\quad A_4B_4D_4\ ;$$

por lo tanto, por el punto A_1 tomado sobre la primera vertical, no habrá más que trazar A_1A_2, paralela á OM_2; luego A_2A_3, paralela á OM_3, y así sucesivamente hasta A_4D_5, paralela á OM_5. El encuentro de A_1C_1 con la última paralela A_4D_5, determina la posición que tiene la resultante de los cuatro pesos. Con esto se evita la construcción de los paralelógramos de las fuerzas, y se simplifica la figura de la izquierda.

Advertiremos todavía que se ha dado á la fuerza auxiliar A_1C_1 una dirección y una intensidad completamente arbitrarias; resulta de esto que, después de haber llevado sobre la vertical las longitudes M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, proporcionales á las áreas de las subdivisiones, podrá fijarse el punto O en una posición cualquiera; el resto de la construcción se reduce á trazar

C_1A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4D_5, respectivamente paralelas á OM_1, OM_2, OM_3, OM_4, OM_5; el encuentro de A_1C_1 y de A_4D_5, dará siempre un punto perteneciente á la resultante de los pesos.

Este procedimiento gráfico ofrece menos exactitud que el empleo de la fórmula

$$x = \frac{\Sigma\, ag}{\Sigma\, a};$$

sin embargo, es mucho más expedito, y aconsejamos aplicarlo, aunque no sea más que como comprobación del resultado de la fórmula. Es, sobre todo, muy útil para presentar el dibujo de resistencia de una bóveda, por la claridad que introduce en las construcciones.

FORMA DE LA CURVA DE INTRADOS

324. Al principiar este capítulo hemos indicado las diferentes formas que podían darse al intrados de las bóvedas cilíndricas; conviene examinar ahora la influencia ejercida por estas formas en la estabilidad de la construcción, y las razones que puedan motivar la elección del perfil.

En los edificios arquitectónicos, la sección de intrados está determinada más bien por consideraciones estéticas que por motivos de conveniencia. Pero no sucede lo mismo tratándose de un puente destinado á dar paso á una corriente de agua de cierta importancia por debajo de una vía de comunicación. Entonces la altura de la rasante del camino sobre la corriente, altura de la que debe deducirse el espesor de la bóveda, así como también la sobrecarga, compuesta de una capa de tierra y del afirmado ó balasto de la vía, da lugar, en sentido vertical, á un claro que puede hallarse en una relación muy variable con la luz total de la obra, sea que ésta se componga de un solo tramo, sea que comprenda varios, en número determinado por circunstancias de localidad.

Es evidente que, si la altura de este vano es mayor que la

semiluz del arco, podrá adoptarse un intrados de medio punto, y esta forma será en general la más conveniente, ya sea como aspecto, ya por dar lugar á un empuje menor y á cierta economía de fábrica, permitiendo reducir el espesor de estribo. Prescindiremos de las formas peraltadas, que no se emplean ya en los puentes modernos.

Pero si al adoptar el medio punto se encuentran los arranques del arco muy bajos, y quedan bañados por las avenidas del río, disminuirá la latitud del desagüe á medida que suba el nivel de la crecida, y acaso llegue dicho desagüe á ser insuficiente para dar paso á los cuerpos flotantes arrastrados por la corriente, pudiendo originarse desperfectos en la obra.

Ante este temor, será preferible elevar los arranques adoptando una forma rebajada. Semejante disposición se impone forzosamente cuando la semiluz es mayor que la altura del claro; en estos casos puede emplearse, ó bien un arco de círculo menor de 180°, ó una curva carpanel, que con frecuencia se sustituye con una semielipse.

325. En los antiguos puentes, y especialmente en los construídos en Francia, obsérvase que, en general, los Ingenieros han dado la preferencia al arco carpanel sobre el escarzano; las razones aducidas por algunos constructores para justificar esta preferencia, no nos parecen suficientemente concluyentes, y juzgamos necesario tratar esta cuestión, que presenta cierto interés.

Se pretende, y con razón, que un puente carpanel, comparado con otro escarzano de igual luz y de igual flecha, ofrece sobre este último la ventaja de mayor desagüe: esto es indiscutible; pero no es menos cierto que puede reemplazarse el arco circular por otro de mayor radio que conserve el mismo vértice y tenga los arranques más elevados; podrá, por lo tanto, ofrecer un desagüe por lo menos tan capaz como el relativo al arco carpanel. La divergencia de opiniones estriba en que atribuyen algunos constructores á este último perfil, á causa, sin duda, de sus caídas verticales, un empuje menor que el del arco escarzano, trazado con las condiciones antedichas; lo cual

no es cierto, y destruye, por lo tanto, el principal fundamento susceptible de prestar algún apoyo á la elección de la forma carpanel.

Es posible que algunos partidarios de esta última forma la hayan adoptado por conveniencias estéticas, atribuyéndola mejor aspecto que al arco circular, lo cual creemos muy discutible; pero puede afirmarse que, bajo el punto de vista del desagüe, el arco carpanel no merece la preferencia.

Para demostrarlo, recordaremos la fórmula aproximada del empuje dada por Navier, y que hemos obtenido también por otro camino (**280**),

$$Q = \frac{\delta'}{2} (2re + e^2).$$

Haciendo abstracción del término e^2, que es muy pequeño con respecto á $2re$, especialmente en las grandes luces, se obtiene una nueva expresión que indica, según hicimos ya notar (**281**) al estudiar el espesor de las bóvedas, que el empuje es sensiblemente proporcional á este espesor y proporcional también al radio de intrados. Así, pues, á medida que crezca este radio, aumentará el empuje; y como el radio en el vértice de un arco carpanel, y es precisamente el que debe considerarse bajo el punto de vista del empuje, como este radio, decimos, excede al relativo á un arco circular con igual desagüe, de aquí resulta que este último arco actuará con menos intensidad sobre los estribos y permitirá cierta reducción en el volumen de fábrica para una misma estabilidad. Se entiende que en ambos casos el espesor de bóveda es idéntico.

326. Como podría quedar todavía alguna duda sobre esto, con motivo de la distinta forma del arco carpanel, es decir, de la variabilidad de los diferentes radios que entran en su trazado, y de las caídas verticales que hacen subir el nivel de los puntos charnela, situándolos á cierta altura sobre los arranques, creemos oportuno insistir más sobre el asunto, presentando los resultados de algunos ejemplos.

Consideraremos una bóveda carpanel de 20 metros de luz rebajada al cuarto, y á la que se asigna un grueso uniforme de $0^m,89$, obtenido con la aplicación de la fórmula de Dupuit $e = 0,20 \sqrt{A}$. Se ha trazado el intrados empleando cinco centros; el radio del vértice resulta de $21^m,10$, y el desagüe total presenta una área igual á 80,40 metros cuadrados. Para conocer la intensidad del empuje de esta bóveda, se aplica el procedimiento de la curva de error con objeto de hallar la posición del punto de rotura, y se efectúa después el cálculo del empuje según se indicó, obteniendo por resultado

$$Q = 13^k,34 \times \delta';$$

δ' representa siempre la densidad de la fábrica.

Reemplacemos ahora esta bóveda por otra circular rebajada al sexto; la flecha será de $3^m,33$ y el radio tendrá por valor $16^m,50$. Admitiendo que las dos bóvedas tienen el vértice en un mismo punto, los arranques de la circular habrán subido $5^m,00 - 3^m,33 = 1^m,67$, y resultará para el desagüe total del claro por encima del nivel de arranques relativo á la bóveda carpanel, la cantidad de 78,67 metros cuadrados, ó casi la misma que para esta última forma. La rotación de la bóveda circular durante el descimbramiento tendrá lugar alrededor del intrados de arranques, y si se le da el mismo grueso de 0,89, se obtiene para el empuje

$$Q = 12^k,40 \times \delta',$$

lo que indica una intensidad inferior á la de la forma carpanel.

Debe observarse que aunque la bóveda circular ofrezca una superficie total de claro ligeramente inferior también al de la otra forma, se halla, sin embargo, aquélla en mejores condiciones para dejar paso á la corriente, pues mientras la latitud de desagüe disminuye en el perfil carpanel á medida que crece el nivel de la avenida, en el otro permanece constante hasta alcanzar la línea de arranques; más arriba es aún superior el ancho del arco circular, mientras no se llega al punto en donde se cruzan los dos perfiles, punto situado á $0^m,83$ por

bajo del vértice de intrados. Más allá, la latitud del arco últimamente mencionado pasa á ser menor. Pero hay que admitir forzosamente que en un proyecto bien estudiado, se dispondrá la obra de modo que las aguas en sus mayores alturas nunca lleguen á dicho punto, pues dejarían un paso insuficiente para los cuerpos flotantes, quedando así demostrado que la adopción de la bóveda escarzana merece la preferencia.

Proseguiremos este examen comparativo, rebajando más el arco escarzano, al que se asignará una flecha de un séptimo de la luz. Los resultados obtenidos son como sigue:

Superficie total de desagüe.	$80^{m^2},90$
Radio de intrados.	$18^{m},91$
Empuje horizontal.	$13^{k},8 \times \delta'$

Se ve que el desagüe, así como el empuje, son ligeramente superiores á los respectivos elementos del arco carpanel.

Rebajando el arco escarzano á $\frac{1}{8}$ de flecha, se halla

Superficie total de desagüe.	$94^{m^2},24$
Radio de intrados..	$21^{m},05$
Intensidad del empuje horizontal.. . . .	$15^{k},2 \times \delta'$

327. Los tres últimos ejemplos que hemos examinado, relativos á arcos escarzanos, indican la existencia de una proporcionalidad bastante aproximada entre el empuje y el radio, puesto que su relación solo varía entre 0,72 y 0,75; pero según se observa también, dicha relación se halla notablemente modificada para la bóveda carpanel, en la que desciende hasta 0,68.

El radio, en el vértice de esta última bóveda, es poco más ó menos igual al del arco circular rebajado al octavo; pero el empuje y el desagüe son menores. Así es que si se reemplaza una bóveda carpanel por la bóveda circular, obtenida al prolongar el arco del vértice, se aumenta el empuje, así como también el desagüe; pero hemos visto, con el primer ejemplo de arco escarzano, que puede colocarse la obra en mejores condiciones de desagüe, sin exceder del empuje relativo el arco carpanel.

Hay más aún. La preferencia que atribuímos al arco circu-

lar rebajado á $\frac{1}{6}$, sobre la bóveda carpanel á $\frac{1}{4}$, queda mucho más justificada, si se tiene en cuenta el menor desarrollo de intrados en el primer caso, lo cual produce una disminución de volumen en la piedra de aparejo ó adovelada; mayor aún sería esta disminución, si adoptando las indicaciones de M. Dupuit y de otros ingenieros, se diese á la bóveda circular menos grueso que á la bóveda carpanel. El perfil circular ofrece además la ventaja de simplificar el aparejo, evitando las piezas que unen los tajamares con la bóveda y también los ensanches ó capialzados que se establecen en los frentes de algunos puentes, como en el de Neuilly. Estas simplificaciones se traducen evidentemente por una economía en el coste de la obra.

Creemos, pues, haber plenamente demostrado que bajo el punto de vista del desagüe y de la economía de construcción los puentes escarzanos son preferibles á los carpaneles.

TRAZADO DE LOS ARCOS

328. Cuando el intrados de una bóveda se compone de un solo arco de círculo, su trazado no ofrece ninguna dificultad. Si el arco es rebajado, se reduce la operación á determinar su radio de modo que pase la curva por el vértice y por los arranques, es decir, por tres puntos de posición conocida.

Sea AB $= 2a$ (fig. 169) la luz del arco, y EC $= f$ su altura ó flecha; la circunferencia de círculo que pasa por los tres puntos A, C, B, y cuyo centro está en O, da lugar á las relaciones

$$\overline{EB}^2 = CE \times ED \qquad ó \qquad a^2 = f \times (2r - f),$$

de donde se deduce para el valor del radio r

$$r = \frac{a^2 + f^2}{2f}.$$

En cuanto se conozca este radio, se obtendrá el ángulo COB ó COA, formado por uno de los radios extremos con la vertical

y que designaremos por θ, por medio de la expresión

$$\text{sen.}\,\theta = \frac{a}{r}.$$

Del conocimiento de este ángulo se deducirá el desarrollo del arco, así como también el área del segmento ACB, que será necesaria para calcular el desagüe del puente.

Se trazan los arcos carpaneles valiéndose de varios radios, cuyo número ha de ser evidentemente impar. Este número y las relaciones de magnitud de dichos arcos, pueden variar hasta el infinito; pero como se trata de obtener una curva continua, sin garrotes ni cambios bruscos de curvatura, es preciso sujetar el trazado á ciertas condiciones. Desde luego se ve que los arcos de círculo de que se compone la curva han de ser tangentes en sus extremos, lo cual exige que los centros de dos radios contiguos se encuentren sobre una misma recta.

Cuando la flecha es inferior á $\frac{1}{4}$, se emplea generalmente en la práctica un solo arco de círculo; si esta flecha varía entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de la luz, ó entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, se adoptan carpaneles de 3 ó 5 centros, para luces de 1 á 10 metros, de 5 ó 7 centros si éstas son de 10 á 40 metros, y por fin, de 7 ó 9 centros para 40 y 50 metros.

329. Examinaremos en primer lugar la curva de tres centros. Siendo AB la luz y KI la flecha (fig. 170), no podrá darse evidentemente á los arcos que parten de los arranques un radio superior en magnitud á esta flecha; entonces el tercer radio será infinito, y la parte central EF del intrados estará formada por una recta tangente á los arcos extremos. Si, por otra parte, se hacen nulos estos últimos arcos, el tercer radio será el relativo al arco de círculo que pasa por los tres puntos A, I, B. Entre las curvas AMINB y AEIFB cabe trazar otras en número infinito, cuyos radios de arranques estarán comprendidos entre cero é IK.

Puede asignarse á estos radios una longitud cualquiera in-

ferior á la de la flecha; sea AI ó BK esta longitud (fig. 171), llévesela además en CL sobre la vertical y á partir del vértice; si se unen los puntos I, L, por medio de una recta, y en su punto medio se levanta una perpendicular, encontrará ésta á la vertical en un punto O, centro del tercer arco.

Para hacer desaparecer la arbitrariedad, puede imponerse la condición de ser un máximo la relación $\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{EO}}$ entre el radio pequeño y el mayor, es decir, que dichos radios se aproximen lo posible á ser iguales. Esta condición es evidentemente la más favorable para conseguir un cambio de curvatura poco sensible en los arcos contiguos.

Supóngase conocido por un momento el ángulo θ que la línea C_0C_1 de los centros (fig. 172) forma con la horizontal AB de arranques. Sobre AB como diámetro descríbase la semicircunferencia ADB, y por el centro se trazará OF, formando el ángulo θ con la horizontal; únase el punto F con D y con B, y por el vértice E de la curva se traza EL paralela á DF; esta recta encontrará á BF en el punto L, por el cual se hará pasar LC_1 paralela á FO. Las intersecciones de esta paralela con la horizontal y con la vertical darán los centros de los dos arcos; de manera que los radios serán iguales á las longitudes LC_0 y LC_1.

En efecto; los dos triángulos LC_0B y EC_1L son respectivamente semejantes á FOB y á DOF; son, pues, isósceles aquellos triángulos, y por lo tanto, el arco trazado desde C_0 como centro y con el radio C_0B pasará por L; asimismo el arco que tiene C_1L por radio y cuyo centro se halla en el punto C_1, pasará por el vértice E.

Para obtener θ se determinarán en función de este ángulo las expresiones de los dos radios, y esto se consigue fácilmente, valiéndose de las relaciones de proporcionalidad á que da lugar el paralelismo de las rectas OF, C_1L por una parte y de DF y EL por otra. Si se iguala á cero la derivada del cociente de dichas dos expresiones, se llega á

$$\text{tang. } \theta = \frac{a}{b}.$$

Este ángulo es el formado con la vertical por la recta que une los puntos E y B, puesto que las dos longitudes OB y OE son respectivamente iguales á a y á b; por lo tanto, si desde el centro O se tira OF perpendicular á EB, esta perpendicular formará con la horizontal el ángulo relativo al máximum de la relación entre los dos radios.

Para trazar un arco carpanel de tres centros con frecuencia se impone otra condición, que consiste en hacer iguales los ángulos AOF', F'OF y FOB formados por los radios sucesivos; pero esta condición favorece menos al buen aspecto de la curva de intrados, por no corresponder á la relación máxima de estos radios, exceptuando el caso en que el cociente $\frac{a}{b}$, de la semiluz partida por la flecha, sea igual á la tangente de 60°, es decir, cuando la flecha compone los 0,288 de la luz.

330. En el trazado de una curva carpanel de más de tres centros, se presenta la indeterminación en grado más elevado, y es preciso imponerse mayor número de condiciones. Se puede, por ejemplo, establecer que los ángulos formados por los radios sucesivos sean iguales entre sí, ó que varíen de modo que los arcos interceptados sobre la curva tengan el mismo desarrollo; pueden también asignarse á ciertos radios longitudes respectivamente iguales á los radios de curvatura de una elipse trazada con los mismos diámetros del arco carpanel, ó se hace variar en progresión aritmética la longitud de los radios sucesivos, desde el menor al mayor.

Nos limitaremos á exponer ligeramente el método propuesto por M. Michal en los *Annales des Ponts et Chaussées*, año 1831.

Este método parte del principio de ser iguales los ángulos formados por los radios sucesivos. Supongamos que se quiere trazar un arco carpanel de cinco centros, cuya luz está dada por la línea AA' (fig. 173) y la flecha por Oh. Sobre AA' como diámetro descríbase una semicircunferencia de círculo que se divide en cinco partes iguales; después de trazar los radios OB, OD, OD', OB' y las cuerdas AB, BD, DH, HD', D'B',

B'A', se tomarán sobre el diámetro, y como primeros radios arbitrarios, las dos distancias iguales AC_0, $A'C'_0$; trazando después por C_0 y por C'_0 dos paralelas á OB y á OB', se obtienen los dos puntos b, b', de encuentro con AB y con A'B' respectivamente; por estos puntos deberán trazarse bd y $b'd'$ paralelas á BD y á B'D' y por h, hd y hd' paralelas á HD y á HD'. Se hallan así dos nuevas intersecciones d y d', por las cuales se hacen pasar dC_2 y $d'C_2$ paralelas á DO y á D'O; estas paralelas se cortan en un mismo punto C_2, que es el tercer centro; las mismas rectas cortan á las prolongaciones de bC_0 y $b'C'_0$ en los puntos C_1 y C'_1 que constituyen los segundos centros. La curva trazada con los cinco centros C_0, C_1, C_2, C'_1 y C'_0, y partiendo de los radios AC_0 ó $A'C'_0$, pasa por el vértice h; en efecto, los triángulos á que dan lugar los radios sucesivos de la curva carpanel son todos isóceles, por ser respectivamente semejantes á los formados por los radios del semicírculo.

Se ve, pues, que aun imponiéndose la condición de igualdad entre los ángulos, deja este método indeterminada la longitud $AC_0 = A'C'_0$ de los primeros radios.

331. Supongamos ahora que el arco carpanel ha de tener siete centros; se hará su trazado por un procedimiento análogo. La semicircunferencia AHA' (fig. 174) se divide en siete partes iguales, y después de trazar las cuerdas y los radios del círculo, se tomarán arbitrariamente para los primeros radios las longitudes iguales AC_0 y $A'C'_0$ y se tirarán después C_0b y C'_0b' paralelas á OB y á OB'. Se fijarán también arbitrariamente los segundos radios bC_1, $b'C'_1$ y se trazarán bd y $b'd'$ paralelas á BD y á B'D', C_1d y $C_1'd'$ paralelas á OD y á OD', así como también de y $d'e'$ paralelas á DE y á D'E'. No queda ya más que hacer pasar por h las dos rectas he y he' en dirección á HE y HE', y por las intersecciones e, e', se trazarán eC_3 y $e'C_3$ paralelamente á EO y E'O; con esto quedarán determinados los terceros y cuartos radios. Se demuestra igualmente que la curva descrita con todos estos centros, y empleando los diversos radios sucesivos, pasa por el vértice h.

Representando por n el número de centros de una curva carpanel, tendremos para el número de radios distintos $\frac{n+1}{2}$; pero como el procedimiento anteriormente expuesto solo permite determinar dos de éstos, resulta que el número de radios arbitrarios y distintos será $\frac{n-3}{2}$. Así, pues, en una curva de 5 centros existirá $\frac{5-3}{2} = 1$ indeterminadas; con 7 centros, habrá $\frac{7-3}{2} = 2$ arbitrarias; para 9 centros el número de arbitrarias será $\frac{9-3}{2} = 3$, y así sucesivamente.

332. Para hacer desaparecer la indeterminación de los radios, los calcula M. Michal haciendo su longitud igual á los radios de curvatura de una elipse en los puntos medios de los arcos correspondientes á estos radios, elipse que ha de tener los mismos semiejes que la curva carpanel.

Indica, al efecto, la siguiente fórmula:

$$\mathrm{R} = \left(\frac{1 + k^2}{a^2 + b^2k^2} \right)^{\frac{3}{2}} a^2b^2,$$

en la que se representa por

a y b, los dos semiejes de la elipse;

k, la tangente trigonométrica del ángulo que la normal en un punto de la elipse forma con el eje mayor;

R, el radio de curvatura en este punto.

Se deduce esta fórmula de la expresión general relativa al radio de curvatura de una curva cualquiera.

Empleando esta fórmula, pueden calcularse fácilmente por logaritmos los radios desconocidos; sin embargo, con objeto de evitar este cálculo, presenta M. Michal los tres cuadros siguientes, que dan los valores de estos radios para curvas de 5, 7 y 9 centros, y para diferentes relaciones entre la flecha y la luz del arco.

NÚMERO 53

CUADRO *para arcos carpaneles de* 5 *centros.*

Relación entre la flecha y la luz.	Relación entre el primer radio y la semiluz.	OBSERVACIONES
0,36	0,556	Los radios forman entre sí ángulos de $\frac{180^{\circ}}{5} = 36$ grados.
0,35	0,530	
0,34	0,504	
0,33	0,477	
0,32	0,450	
0,31	0,423	
0,30	0,396	

NÚMERO 54

CUADRO *para arcos carpaneles de* 7 *centros.*

Relación entre la flecha y la luz.	Relación entre el primer radio y la semiluz.	Relación entre el segundo radio y la semiluz.	OBSERVACIONES
0,33	0,455	0,630	Los radios sucesivos forman entre sí ángulos iguales á $\frac{180^{\circ}}{7} = 25^{\circ},714$.
0,32	0,431	0,604	
0,31	0,406	0,578	
0,30	0,383	0,551	
0,29	0,359	0,525	
0,28	0,336	0,498	
0,27	0,312	0,472	
0,26	0,289	0,445	
0,25	0,265	0,419	

NÚMERO 55

CUADRO *para arcos carpaneles de 9 centros.*

Relación entre la flecha y la luz.	Relación entre el primer radio y la semiluz.	Relación entre el segundo radio y la semiluz.	Relación entre el tercer radio y la semiluz.	OBSERVACIONES
0,25	0,259	0,341	0,597	Los radios sucesivos forman entre sí ángulos iguales á
0,24	0,240	0,318	0,556	
0,23	0,222	0,296	0,535	
0,22	0,203	0,276	0,504	$\frac{180^\circ}{9} = 20$ grados.
0,21	0,185	0,251	0,474	
0,20	0,166	0,228	0,443	

Con los datos de estos cuadros podrán trazarse arcos carpaneles de 5, 7 y 9 centros, cuyas flechas guarden con la luz las relaciones indicadas en los mismos cuadros. No suelen construirse curvas de más de 9 centros; sin embargo, si se quisiera pasar de este número, ó si la relación entre la flecha y la luz no se hallase en los cuadros, debería entonces recurrirse á la fórmula de M. Michal.

333. Las construcciones gráficas anteriormente indicadas para el trazado de curvas con varios centros, partiendo de los radios arbitrarios susceptibles de determinarse por los cuadros ó por la fórmula, permiten fijar las longitudes de los dos últimos radios, con los cuales se completa el trazado; pero como estas longitudes se obtienen por la intersección de dos rectas que se cortan muy oblicuamente, puede resultar alguna incertidumbre sobre la posición exacta del punto de encuentro. Se evita fácilmente el inconveniente por medio de las dos expresiones siguientes.

Se tiene para el penúltimo radio

$$R_{n-1} = \frac{b_1 (\text{tang.}\,\varphi_2 + \text{tang.}\,\varphi_1) - a_1 \text{tang.}\,\varphi\,(\text{tang.}\,\varphi_2 - \text{tang.}\,\varphi_1)}{\cos.\,\varphi_3\,(\text{tang.}\,\varphi_1 - \text{tang.}\,\varphi)\,(\text{tang.}\,\varphi_3 - \text{tang.}\,\varphi_2)},$$

y para el último

$$R_n = \frac{b_1 + a_1 \text{ tang. } \varphi_1}{\cos. \varphi_3 \, (\text{tang. } \varphi_1 - \text{tang. } \varphi)} \; .$$

En estas fórmulas se designa por

φ, el ángulo formado por la última cuerda hE con la horizontal (fig. 175);

φ_1, el ángulo de la penúltima cuerda EM con la horizontal;

φ_2, el ángulo del penúltimo radio MC_{n-1} con la horizontal;

φ_3, el ángulo del último radio EC_n con la horizontal;

a_1, la distancia MS del penúltimo punto de división al eje vertical;

b_1, la altura hS del vértice h sobre la horizontal del punto M.

Se hallará fácilmente la posición del punto M por las construcciones gráficas ó por el cálculo; se conocerán, pues, a_1 y b_1; los ángulos φ, φ_1, φ_2, φ_3, son también conocidos; por lo tanto, aplicando las anteriores expresiones se obtendrán los dos últimos radios.

334. En la actualidad se sustituye con frecuencia el arco carpanel con una semielipse de igual luz y flecha. El trazado de esta curva puede efectuarse sin dificultad por los varios medios conocidos. Nos limitaremos á exponer un procedimiento sencillo para trazar en la montea las normales al intrados que han de formar las juntas de las dovelas.

Consideremos un cuarto de elipse y el rectángulo OACB que le corresponde (fig. 176). Sean M_1, M_2, M_3, los puntos por los que hay que hacer pasar normales; lo que diremos para el primero de estos puntos se aplica á los demás. Por M_1 se traza una vertical hasta el encuentro L_1 con la diagonal OC; por este punto L_1 una perpendicular á la otra diagonal AB; dicha perpendicular cortará al diámetro mayor en N_1. La recta que une los puntos M_1 y N_1 es normal á la elipse.

En efecto; la semejanza de los triángulos $P_1L_1N_1$ y OAB, da lugar á la relación

$$\frac{P_1L_1}{P_1N_1} = \frac{OA}{OB} = \frac{a}{b} \; .$$

De las propiedades de la subnormal se deduce

$$\frac{P_1N_1}{OP_1} = \frac{b^2}{a^2}:$$

multiplicando miembro á miembro, resulta

$$\frac{P_1L_1}{OP_1} = \frac{b}{a};$$

lo que demuestra que el punto L se halla sobre la recta OC.

CAPÍTULO VII

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LAS BÓVEDAS

---

335. Al emprender el estudio relativo á la estabilidad de las construcciones de mampostería, fué nuestro propósito, según ya se ha dicho, llegar á obtener resultados prácticos y de fácil aplicación; en su consecuencia, y de una manera análoga á lo que se hizo para los muros de sostenimiento, aplicaremos los principios expuestos en el capítulo anterior á las diferentes clases de bóvedas más generalmente usadas, haciendo variar la luz entre límites suficientemente extensos. Se deducirán de estas aplicaciones las dimensiones que conviene dar á los estribos destinados á contrarrestar el empuje, y al mismo tiempo se formularán los resultados por medio de expresiones que se han procurado simplificar en lo posible.

Como perfil de intrados examinaremos: 1.° Los arcos de medio punto. 2.° Los escarzanos rebajados á $\frac{1}{4}$, á $\frac{1}{6}$ y á $\frac{1}{8}$; los arcos carpaneles, cuya flecha es el $\frac{1}{3}$ y el $\frac{1}{4}$ de la luz. 4.° Por último, los ojivales ó apuntados trazados con un radio igual al claro entre estribos. Para cada una de estas bóvedas se ha partido de una luz de 4 metros, que se va aumentando de dos en dos hasta 20. Aunque las fórmulas deducidas de este examen pueden aplicarse á obras de mayores dimensiones, especialmente en un anteproyecto; sin embargo, cuando se trate

del proyecto definitivo de una construcción de esta importancia, siempre será conveniente hacer un estudio directo bajo todos conceptos, que ponga bien en evidencia las condiciones de estabilidad de dicha construcción.

Se han adoptado, para las bóvedas objeto de este examen, ciertas disposiciones generales que conviene dar á conocer.

1.° El espesor de la bóveda será uniforme y determinado, con arreglo á la fórmula de *Dupuit* (**285**)

$$e = 0{,}20 \sqrt{A},$$

en la que A representa la luz ó distancia entre los estribos en los arranques. Se ha aplicado esta fórmula á toda clase de arcos, lo mismo á los que tienen sus caídas verticales, como á los circulares rebajados; sin embargo, no impide esto que se adopte en la práctica el espesor que resulte de cualquiera de las demás expresiones que hemos dado á conocer.

2.° Con objeto de simplificar en lo posible las fórmulas prácticas, haciéndolas independientes de la altura de los estribos, se han dispuesto estos macizos con un talud de $\frac{1}{5}$ por la parte interior, que en los puentes se halla en contacto con el terraplén. Con semejante disposición, muy lógica en principio, el brazo de palanca de la resistencia de giro crece á medida que aumenta la altura del estribo; al mismo tiempo se aleja de la arista de rotación la resultante que fija las presiones en la base.

3.° El paramento interior de los estribos se prolongará por encima de los arranques, hasta una altura de 0,3 de la luz para los medios puntos; 0,15 para los arcos carpaneles; y hasta el nivel del trasdos de la junta de arranques, tratándose de bóvedas circulares rebajadas. Se termina luego el macizo por medio de una recta tangente al trasdos de la bóveda.

336. Lo primero que debe hacerse en cada caso es fijar la posición de la junta de rotura. Esta operación es necesaria, no solo para las bóvedas cuya tangente en los arranques es verti-

cal, sino también para los arcos circulares rebajados á $\frac{1}{4}$, pues en éstos la charnela de giro podrá hallarse por encima de los arranques, no sucediendo lo mismo cuando la flecha es de $\frac{1}{6}$ ó de $\frac{1}{8}$ de la luz.

Se ha representado el dibujo de la bóveda trazando el intrados y el trasdos con separación uniforme, igual al espesor deducido de la citada fórmula de Dupuit, y subdividiendo la sección en dovelas de un ancho medio igual á $0^m,60$. Puede fácilmente fijarse el centro de gravedad de cada una de estas dovelas, y tomando luego con la escala las distancias g_1, g_2, g_3, ... g_n, de estos centros al eje, se obtendrá la posición de la vertical que pasa por el centro de gravedad de un número n de dovelas por medio de la fórmula

$$x = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots g_n}{n}.$$

Si se determina esta posición para tres porciones distintas de bóveda, partiendo siempre del vértice, y tales que sus extremidades inferiores comprendan entre sí la junta de rotura, podrá aplicarse el método de la curva de error (**256**) para hallar esta junta. Hecho esto, se tendrán los elementos necesarios para establecer la ecuación de equilibrio con respecto al punto charnela, es decir, la igualdad de momentos del peso de la semibóveda superior á este punto, y del empuje cuya intensidad se deduce de dicha ecuación. Ya no quedará más que trasportar, tanto el empuje como el peso de la semibóveda, al mismo punto charnela, que forma uno de los vértices del estribo, y teniendo además en cuenta el peso de este último macizo, se obtendrá sin dificultad el ancho que debe dársele para contrarrestar la acción de la bóveda, con cierto exceso de resistencia, mayor ó menor, según sea el coeficiente de estabilidad adoptado.

337. A fin de aclarar estas indicaciones, vamos á exponer

los cálculos de un medio punto de 10 metros de diámetro, conforme los hemos practicado.

La bóveda (fig. 177), cuyo espesor uniforme AB es de $0^m,63$, ha sido dividida en dovelas de un ancho medio igual á $0^m,60$; aplicando el procedimiento antes indicado, fijaremos la posición de las verticales 7, 8 y 9 que pasan por los centros de gravedad de las tres agrupaciones de dovelas comprendidas entre la clave y las respectivas juntas de igual número. Las intersecciones de estas verticales con las tangentes trazadas en los puntos 7, 8 y 9 de intrados darán tres puntos de la curva de error. Uniendo estos puntos, obtendremos una intersección L con la horizontal del empuje en la clave; por este punto se traza una tangente al intrados, cuyo contacto D determina el punto de rotura. Tomando con la escala las distancias DN , NL , de este punto á la vertical de L y á la horizontal del empuje, se obtiene con la primera el brazo de palanca del peso de la semibóveda que produce el máximo empuje, y con la segunda el brazo de palanca de este empuje. Resulta para dichas distancias, $DN = 1^m,72$ y $NL = 2^m,35$.

El punto de giro cae entre los puntos 8 y 9 de intrados, y á una distancia del primero que compone los 0,35 del ancho de boquilla de la dovela; designando por δ' la densidad de la mampostería, se hallará para el peso de la semibóveda

$$P = \delta' \times 8,35 \times 0,60 \times 0,63 = \delta' \times 3,1563,$$

y el empuje de la bóveda será

$$Q = \delta' \times 3,1563 \times \frac{1,72}{2,35} = 2,31 \times \delta'.$$

Advertiremos que se han tomado para puntos de paso de la curva de presión, por un lado el punto medio de la junta de clave, y por otro la extremidad inferior de la junta de rotura; pero según la teoría de Dupuit, el primer punto debe hallarse un poco más alto, y la experiencia demuestra que lo mismo sucede con el segundo. Así, pues, en rigor hemos descendido li-

geramente esta curva; pero se comprende que el resultado obtenido para la intensidad del empuje debe aproximarse mucho al verdadero, en los límites de exactitud compatibles con un problema de esta naturaleza.

Las fuerzas P y Q se trasladarán al punto D, y será después fácil establecer la ecuación de equilibrio relativa al giro alrededor de la arista de la base del estribo. Supongamos por de pronto que esta base se halle al nivel de los arranques de la bóveda, de manera que la rotación tenga lugar alrededor del punto C. Consideraremos como macizo resistente el señalado por el contorno DFCITS, cuya parte superior TI es una horizontal situada por encima de los arranques á una altura IJ $= 0{,}30 \times 10^{m}{,}00 = 3$ metros, y cuyo paramento IC está inclinado á $\frac{1}{5}$. Se prescinde de la carga de fábrica sobre los riñones de la bóveda. La incógnita del problema será el ancho FJ, que designamos por x, y la sección del estribo se compondrá: 1.° Del triángulo mixtilíneo DSF, que se reemplaza por un triángulo rectilíneo equivalente cuyo momento tiene por valor $1{,}175 \times (0^{m}{,}91 + x)$. 2.° Del rectángulo TIFJ, cuyo momento es $3{,}00\, x \times \left(\frac{x}{2} + 0{,}60\right)$. 3.° Por último, del triángulo IJC, representado por $3{,}00 \times 0{,}30 \times 0{,}40$.

El brazo de palanca del empuje es DE $= 2^{m}{,}96$ y el del peso de la semibóveda EC $= 1^{m}{,}54 + x$.

Para obtener una resistencia conveniente, á la par que se tienen en cuenta las causas accidentales susceptibles de aumentar el empuje, hemos creido necesario adoptar en todos los casos un coeficiente de estabilidad igual á 3; podremos, pues, establecer la siguiente ecuación de equilibrio

$$3{,}16\,(1{,}54 + x) + 1{,}175\,(0{,}91 + x) + 3{,}00\,x\left(\frac{x}{2} + 0{,}60\right)$$
$$+ 0{,}90 \times 0{,}40 = 3 \times 2{,}31 \times 2{,}96.$$

El segundo miembro representa el momento del empuje

multiplicado por el coeficiente de estabilidad; el primer término del primero se refiere al momento del peso de la semibóveda; por último, los demás términos componen el momento del estribo. Se prescinde de la densidad de la mampostería que se supone la misma para el estribo y para la bóveda, en cuyo caso entra como factor en todos los términos de la ecuación.

Simplificando se llega á

$$x^2 + 4{,}087\,x = 9{,}4815,$$

de donde se deduce

$$x = 1^{m}{,}65.$$

Este valor de x corresponde á la longitud FJ; agregándole JC $= 0^{m}{,}60$, se obtiene para el espesor de estribos en los arranques

$$FC = 1^{m}{,}65 + 0^{m}{,}60 = 2^{m}{,}25.$$

Supongamos ahora que los arranques tienen una altura de dos metros; el punto de giro C se habrá alejado del paramento visto de una cantidad igual á $\frac{1}{5} \times 2^{m}{,}00 = 0{,}40$; el brazo de palanca del empuje, así como las alturas del rectángulo TIJF, y del triángulo JIC, habrán aumentado en dos metros, y la nueva ecuación de equilibrio será

$$3{,}16\,(1{,}94 + x) + 1{,}175\,(1{,}31 + x) + 5{,}00x\left(\frac{x}{2} + 1{,}00\right)$$
$$+ 2{,}50 \times 0{,}67 = 3 \times 2{,}31 \times 4{,}96.$$

Resulta simplificando

$$x^2 \times 3{,}732x = 10{,}0143,$$

de donde

$$x = 1^{m}{,}81;$$

para el valor de FJ; por lo tanto, el espesor de arranques será

$$FC = 1^m,81 + 0^m,60 = 2^m,41.$$

Asimismo, tomando cuatro metros para la altura de arranques sobre la base de los estribos, se llega á la ecuación

$$x^2 + 4,037x = 9,7918$$

y

$$x = 1^m,71,$$

resultando la latitud de arranques

$$FC = 1^m,71 + 0^m,60 = 2^m,31.$$

338. Conviene fijar la atención sobre los diferentes resultados obtenidos para el ancho de estribos en los arranques, á medida que aumenta su altura. Son estos anchos

$2^m,25$	para	una	altura	nula
2,41	»	»	»	de 2 metros;
2,31	»	»	»	de 4 metros.

Existe, pues, un máximo que aproximadamente corresponde á la altura de 2 metros; decrece luego la latitud para elevaciones mayores.

Este resultado no debe sorprender; es consecuencia del talud que hemos asignado al paramento del estribo opuesto al empuje. En efecto, si en el interior de este macizo trazamos la curva de presión, se verá que su inclinación se acerca tanto más á la vertical, cuanto más bajo consideramos el punto de la curva, lo cual se halla además en harmonía con lo que se dijo en el capítulo anterior (**301**) con respecto al ancho de estribo, ancho que para oponerse al movimiento de giro no excede de cierto límite, cualquiera que sea la altura. De aquí resulta que en el caso de dar al paramento interior una inclinación constante, se ensancha la base, se aleja el punto de rotación y se aumenta la estabilidad, á medida que se considera una hilada más baja.

El ancho máximo de arranques hubiera correspondido á una altura menor de 2 metros, si se hubiese dado al estribo un talud mayor de $\frac{1}{5}$; lo contrario sucedería al disminuir este talud. Disponiendo el paramento verticalmente, se obtienen latitudes de estribo que van siempre en aumento hasta llegar al ancho límite que corresponde á una altura de estribo indefinida. Con la citada disposición vertical podrían calcularse los anchos con la misma facilidad; pero hemos preferido limitarnos al caso del talud de $\frac{1}{5}$, á fin de obtener resultados independientes de la altura; además, según ya hemos dicho, se consigue la ventaja de aumentar la latitud de base, alejar la resultante de la arista de giro á medida que aumenta la altura, y como consecuencia final, disminuir las probabilidades de aplastamiento del material.

Si damos á los arranques del estribo, y para cualquiera altura, el ancho máximo calculado, se asegura la estabilidad; aunque en algunos casos pueda este ancho parecer excesivo, es, sin embargo, necesario cuando se prescinde de la cohesión del mortero, ó más bien cuando se considera el macizo como compuesto de hiladas, sin trabazón alguna entre sí; es evidente que entonces el estribo tenderá á girar alrededor de la hilada correspondiente al máximo, con preferencia á otra más baja.

339. Con el procedimiento indicado para el cálculo de la latitud de estribo, se ha prescindido por completo de las sobrecargas fijas de tierra ó de mampostería que se colocan sobre las bóvedas de los puentes. Al tratar de estas sobrecargas en el capítulo anterior, se vió (**261**) que según fuese la posición de su centro de gravedad con respecto al punto llamado neutro, podían alterar en más ó en menos la estabilidad de giro de la obra. En lo que se refiere á los pesos móviles, dijimos que producían en la curva de presión oscilaciones que deben estar contenidas en el espesor de la bóveda; además, en los puentes estos pesos, compuestos de los vehículos de trasporte, obran

sobre la bóveda por el intermedio de una capa de tierra y materiales que forman la vía, de donde resulta que su acción se trasmite sobre cierta extensión de la superficie de trasdos más ó menos grande, siendo por lo tanto muy difícil poder apreciar las modificaciones introducidas en la curva de presión. Para salvar la dificultad, se acostumbra reemplazar la carga móvil por otra fija, uniformemente distribuída sobre el camino, carga susceptible de representarse por una capa de fábrica de espesor constante.

Es precisamente para atender á los efectos producidos por todas estas sobrecargas, y también para colocar la obra en buenas condiciones de resistencia al aplastamiento, al mismo tiempo que para tener en cuenta las causas más ó menos previstas susceptibles de modificar la estabilidad, por lo que hemos creído deber forzar un poco el coeficiente de resistencia, haciéndolo igual á 3.

En vista de la magnitud del coeficiente adoptado, deben inspirar completa confianza los espesores de estribo calculados según se ha dicho; los compararemos, sin embargo, con los que se obtienen aplicando diversas fórmulas prácticas propuestas por algunos ingenieros.

340. Pero antes presentamos en los siguientes cuadros los resultados de nuestros cálculos, haciendo variar la luz del arco y la altura de estribo. Indícase además en los mismos el espesor uniforme de la bóveda, la intensidad del empuje, el peso de la semibóveda y los brazos de palanca de este peso y del empuje.

NÚMERO 56

CUADRO *de espesores de estribo en los arranques, para bóvedas de medio punto.*

Luz de la bóveda.	Espesor de la bóveda.	Empuje horizontal.	Peso de la semi-bóveda.	BRAZO DE PALANCA DEL		ESPESORES DE ESTRIBO EN LOS ARRANQUES PARA ALTURAS DE			OBSERVACIONES
				Empuje.	Semi-bóveda.	00m,0	2m,00	4m,00	
m.	m.	K.	K.	m.	m.	m.	m.	m.	
4,00	0,40	0,518 δ'	0,960 δ'	1,28	0,69	0,80	**0,99**	0,80	El paramento interior del estribo presenta un talud de $\frac{1}{5}$ que se prolonga por encima de los arranques, hasta una altura de 0,3 de la luz.
6,00	0,49	0,987 –	1,167 –	1,67	1,02	1,20	**1,45**	1,38	
8,00	0,57	1,553 –	2,360 –	2,07	1,38	1,72	**1,90**	1,79	
10,00	0,63	2,310 –	3,156 –	2,35	1,72	2,25	**2,41**	2,31	
12,00	0,69	3,000 –	4,036 –	2,75	2,05	2,57	**2,72**	2,65	
14,00	0,75	3,900 –	5,060 –	3,12	2,40	2,94	**3,11**	3,05	
16,00	0,80	4,829 –	5,880 –	3,30	2,71	3,30	**3,46**	3,42	
18,00	0,85	5,857 –	6,770 –	3,47	3,00	3,67	**3,87**	3,83	
20,00	0,89	6,876 –	7,920 –	3,87	3,36	3,96	**4,15**	4,13	

NÚMERO 57

CUADRO *de espesores de estribo en los arranques, para bóvedas circulares rebajadas á* $\frac{1}{4}$.

Luz de la bóveda.	Espesor de la bóveda.	Intensidad del empuje.	Peso de la semi-bóveda.	BRAZO DE PALANCA DEL		ESPESORES DE ESTRIBO EN LOS ARRANQUES PARA ALTURAS DE			OBSERVACIONES
				Empuje.	Semi-bóveda.	**2m,00**	**4m,00**	**6m,00**	
m.	m.	K.	K.	m.	m.	m.	m.	m.	
4,00	0,40	0,691 δ'	1,000 δ'	1,20	0,83	**1,14**	1,01	0,77	El paramento interior del estribo presenta un talud $\frac{1}{5}$ que se prolonga por encima de los arranques hasta el nivel del trasdos de la junta de arranques.
6,00	0,49	1,320 —	1,808 —	1,74	1,27	**1,57**	1,57	1,37	
8,00	0,57	2,261 —	2,394 —	1,80	1,70	1,95	**2,05**	1,93	
10,00	0,63	2,975 —	3,553 —	2,50	2,09	2,40	**2,60**	2,48	
12,00	0,69	3,910 —	4,671 —	3,01	2,52	2,78	**2,97**	2,91	
14,00	0,75	5,040 —	5,400 —	3,28	2,90	3,15	**3,46**	3,44	
16,00	0,80	6,300 —	6,876 —	3,55	3,28	3,51	3,97	**3,97**	
18,00	0,85	7,593 —	8,160 —	4,03	3,75	3,77	4,32	**4,38**	
20,00	0,89	8,932 —	9,256 —	4,28	4,13	4,19	4,77	**4,79**	

NÚMERO 58

CUADRO *de espesores de estribo en los arranques, para bóvedas circulares rebajadas á* $\frac{1}{6}$.

Luz de la bóveda.	Espesor de la bóveda.	Empuje de la bóveda.	Peso de la semi-bóveda.	Brazo de palanca del		Espesores de estribo en los arranques para alturas de			Observaciones
				Empuje.	Semi-bóveda.	2m,00	4m,00	6m,00	
m.	m.	K.	K.	m.	m.	m.	m.	m.	
4,00	0,40	0,934 δ'	0,904 δ'	0,87	0,90	**1,46**	1,31	1,08	El paramento interior de los estribos presenta un talud de $\frac{1}{5}$ que se prolonga por encima de los arranques hasta el nivel del trasdos de la junta de arranques.
6,00	0,49	1,800 —	1,688 —	1,24	1,32	1,99	**2,00**	1,83	
8,00	0,57	2,894 —	2,542 —	1,61	1,83	2,47	**2,65**	2,51	
10,00	0,63	4,035 —	3,477 —	1,98	2,30	2,83	**3,16**	3,08	
12,00	0,69	5,388 —	4,554 —	2,34	2,77	3,16	**3,65**	3,64	
14,00	0,75	6,962 —	5,700 —	2,70	3,30	3,49	4,14	**4,21**	
16,00	0,80	8,538 —	7,040 —	3,07	3,72	3,70	4,50	**4,65**	
18,00	0,85	10,269 —	8,398 —	3,42	4,18	3,94	4,90	**5,13**	
20,00	0,89	12,132 —	9,790 —	3,77	4,67	4,16	5,27	**5,57**	

NÚMERO 59

CUADRO *de espesores de estribo en los arranques, para bóvedas circulares rebajadas á* $\frac{1}{8}$.

Luz de la bóveda.	Espesor de la bóveda.	Empuje de la bóveda.	Peso de la semi-bóveda.	BRAZO DE PALANCA DEL		ESPESORES DE ESTRIBO EN LOS ARRANQUES PARA ALTURAS DE			OBSERVACIONES
				Empuje.	Semi-bóveda.	2m,00	4m,00	6m,00	
m.	m.	K.	K.	m.	m.	m.	m.	m.	
4,00	0,40	1,148 δ'	0,872 δ'	0,70	0,92	**1,68**	1,57	1,32	El paramento interior del estribo presenta un talud de $\frac{1}{5}$ que se prolonga por encima de los arranques hasta el nivel del trasdos de la junta de arranques.
6,00	0,49	2,240 —	1,583 —	1,00	1,41	2,34	**2,38**	2,18	
8,00	0,57	3,600 —	2,440 —	1,28	1,89	2,89	**3,10**	2,96	
10,00	0,63	5,060 —	3,351 —	1,56	2,35	3,34	**3,71**	3,64	
12,00	0,69	6,787 —	4,388 —	1,85	2,86	3,76	**4,29**	4,29	
14,00	0,75	8,777 —	5,568 —	2,12	3,34	3,92	4,83	**4,93**	
16,00	0,80	10,847 —	6,800 —	2,40	3,83	4,46	5,43	**5,52**	
18,00	0,85	13,021 —	8,109 —	2,67	4,27	4,75	5,79	**6,05**	
20,00	0,89	15,245 —	9,407 —	2,94	4,76	4,99	6,19	**6,53**	

NÚMERO 60

CUADRO *de espesores de estribo en los arranques, para bóvedas carpaneles rebajadas á* $\frac{1}{3}$.

Luz de la bóveda.	Espesor de la bóveda.	Empuje de la bóveda.	Peso de la semi-bóveda.	Brazo de palanca del Empuje.	Brazo de palanca del Semi-bóveda.	Espesores de estribo en los arranques para alturas de $0^m,00$	$2^m,00$	$4^m,00$	Observaciones
m.	m.	K.	K.	m.	m.	m.	m.	m.	
4,00	0,40	0,677 δ'	0,876 δ'	0,97	0,75	0,80	**1,25**	1,06	El paramento interior del estribo presenta un talud de $\frac{1}{5}$ que se prolonga por encima de los arranques hasta una altura igual á 0,15 de la luz.
6,00	0,49	1,498 —	1,510 —	1,21	1,12	1,46	**1,85**	1,70	
8,00	0,57	2,203 —	2,143 —	1,42	1,46	2,07	**2,51**	2,41	
10,00	0,63	3,122 —	2,800 —	1,58	1,79	2,66	**3,09**	3,01	
12,00	0,69	4,267 —	3,519 —	1,74	2,11	3,29	**3,66**	3,60	
14,00	0,75	5,500 —	4,260 —	1,88	2,48	3,87	**4,28**	4,24	
16,00	0,80	6,883 —	5,160 —	2,02	2,70	4,42	**4,73**	4,73	
18,00	0,85	8,286 —	6,120 —	2,26	3,08	4,94	**5,27**	5,27	
20,00	0,89	9,219 —	6,942 —	2,50	3,32	4,98	**5,42**	5,42	

NÚMERO 61

CUADRO *de espesores de estribo en los arranques, para bóvedas carpaneles rebajadas á* $\frac{1}{4}$.

Luz de la bóveda.	Espesor de la bóveda.	Empuje de la bóveda.	Peso de la semi-bóveda.	BRAZO DE PALANCA DEL		ESPESORES DE ESTRIBO EN LOS ARRANQUES PARA ALTURAS DE			OBSERVACIONES
				Empuje.	Semi-bóveda.	$0^m,00$	$2^m,00$	$4^m,00$	
m.	m.	K.	K.	m.	m.	m.	m.	m.	
4,00	0,40	0,926 δ'	0,720 δ'	0,69	0,72	1,17	**1,63**	1,41	El paramento interior del estribo presenta un talud de $\frac{1}{5}$ que se prolonga por encima de los arranques hasta una altura de 0,15 de la luz.
6,00	0,49	1,784 —	1,264 —	0,78	1,10	1,71	**2,29**	2,15	
8,00	0,57	2,825 —	1,910 —	0,98	1,45	2,25	**2,89**	2,82	
10,00	0,63	4,169 —	2,520 —	1,07	1,77	2,80	**3,49**	3,49	
12,00	0,69	5,582 —	3,243 —	1,23	2,12	3,62	4,18	**4,18**	
14,00	0,75	7,144 —	4,253 —	1,50	2,52	4,05	4,71	**4,72**	
16,00	0,80	9,158 —	5,088 —	1,60	2,83	4,69	5,35	**5,36**	
18,00	0,85	11,040 —	5,886 —	1,69	3,13	5,50	6,08	**6,15**	
20,00	0,89	13,043 —	6,746 —	1,79	3,48	5,94	6,55	**6,66**	

NÚMERO 62

CUADRO *de espesores de estribo en los arranques, para bóvedas ojivales de radio igual á la luz.*

Luz de la bóveda.	Espesor de la bóveda.	Empuje de la bóveda.	Peso de la semi-bóveda.	BRAZO DE PALANCA DEL		ESPESORES DE ESTRIBO EN LOS ARRANQUES PARA ALTURAS DE			OBSERVACIONES
				Empuje.	Semi-bóveda.	$0^m,00$	$2^m,00$	$4^m,00$	
m.	m.	K.	K.	m.	m.	m.	m.	m.	El paramento interior del estribo presenta un talud de $\frac{1}{5}$ que se prolonga por encima de los arranques hasta una altura igual á 0,3 de la luz.
4,00	0,42	0,370 δ'	1,380 δ'	2,46	0,66	0,55	**0,68**	0,51	
6,00	0,49	0,687 —	2,450 —	3,64	1,02	0,84	**0,99**	0,86	
8,00	0,57	1,091 —	3,716 —	4,70	1,38	1,14	**1,30**	1,20	
10,00	0,63	1,520 —	4,996 —	5,75	1,75	1,44	**1,62**	1,54	
12,00	0,69	1,963 —	6,624 —	7,25	2,08	1,65	**1,93**	1,75	
14,00	0,75	2,600 —	8,235 —	7,98	2,52	2,05	**2,18**	2,13	
16,00	0,80	3,110 —	10,024 —	9,17	2,85	2,24	**2,37**	2,34	
18,00	0,85	3,767 —	11,900 —	10,17	3,22	2,61	**2,72**	2,67	
20,00	0,89	4,347 —	13,741 —	11,38	3,60	2,79	**2,89**	2,86	

En los estados que preceden, y para cada luz de bóveda, se ha señalado con números más gruesos el mayor espesor obtenido. Sin embargo, no será este el verdadero máximo, que en general no corresponde exactamente con una de las juntas que dividen la altura del estribo de dos en dos metros; pero la diferencia ofrece escasa importancia.

341. Hemos tratado de formular los resultados obtenidos, por medio de expresiones lineales, y por lo tanto muy sencillas, que permitan hallar rápidamente el espesor, en todos los casos, con la suficiente exactitud.

Las siguientes fórmulas que proponemos se componen de un mismo término constante para todas, y de una fracción variable, según la forma del arco, que multiplica la luz.

FÓRMULAS PARA HALLAR EL ESPESOR DE ESTRIBO EN LOS ARRANQUES.

Arcos de medio punto. . . . . . $E = 0{,}40 + 0{,}19\ A$

Arcos circulares rebajados á $\frac{1}{4}$ .... $E = 0{,}40 + 0{,}22\ A$

» » » $\frac{1}{6}$ .... $E = 0{,}40 + 0{,}26\ A$

» » » $\frac{1}{8}$ .... $E = 0{,}40 + 0{,}31\ A$

» » » $\frac{1}{10}$ .... $E = 0{,}40 + 0{,}37\ A$

Arcos carpaneles rebajados á $\frac{1}{3}$ .. $E = 0{,}40 + 0{,}26\ A$

» » » $\frac{1}{4}$ .. $E = 0{,}40 + 0{,}31\ A$

» » » $\frac{1}{5}$ .. $E = 0{,}40 + 0{,}37\ A$

Arcos ojivales de radio igual á la luz. $E = 0{,}40 + 0{,}12\ A$

Si comparamos los espesores de arranques que dan estas fórmulas con los señalados con números gruesos en los cuadros anteriores, se notarán algunas divergencias inevitables, en más

ó en menos, pero que nada tienen de exagerado; por lo tanto, consideramos dichas fórmulas como de conveniente aplicación á los diversos casos prácticos, especialmente para luces que no excedan mucho de 20 metros.

Si el arco tiene una flecha cuya relación con la luz esté comprendida entre las que hemos sometido al cálculo, se tomará como coeficiente de A una cantidad intermedia entre los coeficientes más inmediatos, ó bien se deducirá por interpelación; pero no es necesario tratar de fijarlo con demasiada exactitud, pues media centésima en más ó en menos, solo representa una diferencia de $0^m,10$ en el espesor de estribo para una bóveda de 20 metros de luz.

Para poder recordar con alguna facilidad los distintos coeficientes de A aplicables á las diversas formas de arco consideradas, obsérvase que las diferencias sucesivas entre los relativos á las bóvedas circulares, á partir de la de medio punto, cuyo coeficiente es 0,19, hasta la rebajada á $\frac{1}{10}$, son: 0,03, 0,04, 0,05 y 0,06. Además, para los arcos carpaneles el coeficiente es igual al de un intrados circular cuya flecha sea la mitad.

Se entiende que al fijar con nuestras fórmulas el espesor de arranques, suponemos que el paramento interior del estribo presenta un talud de $\frac{1}{5}$, que se prolonga por encima de estos arranques, según se ha indicado ya, ó sea de una cantidad igual á

0,3 de la luz para los arcos de medio punto y los ojivales;

0,15 de la luz para los arcos carpaneles; y por último, hasta el nivel del trasdos de la junta de arranques para los arcos escarzanos.

342. Creemos que las fórmulas propuestas nada dejan que desear bajo el punto de vista de la sencillez y de la rapidez con que permiten obtener el resultado; pero es también preciso que inspiren completa confianza á los constructores que carecen del tiempo necesario para seguir los razonamientos y cálculos con-

ducentes á su establecimiento. Para lograr este importante fin, compararemos dichas fórmulas con las que más generalmente se emplean en la práctica y son más conocidas, como sucede con las de *Leveillé* y de *Lesguillier*.

Pero debe advertirse que éstas parten del supuesto de ser uniforme el espesor de estribo, y por lo tanto, vertical el paramento interior, lo mismo que el exterior; son, pues, funciones de la altura de estribo, y es evidente que para poder hacer la comparación, es indispensable sujetar nuestras fórmulas á la misma hipótesis. Para esto, no hay más que sustituir la sección de estribo con talud, obtenida según se tiene indicado, por otra rectangular de igual resistencia al giro, aplicando al efecto la regla de transformación de perfiles al noveno.

Sea ABCFELD (fig. 178) un estribo perteneciente á una bóveda de medio punto, y cuya forma y dimensiones han sido fijadas siguiendo las anteriores indicaciones; por lo tanto, el paramento FC con talud de $\frac{1}{5}$ se prolonga hasta la altura AE igual á 0,3 de la luz, y el ancho AI en los arranques está determinado por la fórmula propuesta para los medios puntos. Haciendo caso omiso del triángulo ADL, el resto del estribo, ó sea el trapecio EBCF, puede reemplazarse por el rectángulo EMNB, de igual resistencia al giro, con tal de darle la latitud TS que tiene el trapecio al noveno de la altura EB. Pero se verifica

$$\mathrm{TS} = \mathrm{AI} - \mathrm{JI} + \mathrm{FM},$$

y si designamos por

E, el ancho primitivo AI en los arranques;

E_1, el ancho uniforme del rectángulo;

H, la altura AB de los arranques sobre la base;

h, la altura AE sobre los arranques;

la ecuación que precede se convierte en

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{E} - \frac{h}{5} + \frac{8}{9}\ \frac{h + \mathrm{H}}{5} = \mathrm{E} + \frac{8}{45}\mathrm{H} - \frac{1}{45}h.$$

Tenemos en un medio punto, $h = 0{,}3$ A; por lo tanto,

$$E_1 = E + 0{,}18\ H - 0{,}0066\ A.$$

El término 0,0066 A es muy pequeño, pues aun para una luz de 20 metros, no da más que $0^m{,}12$; al suprimir este término se aumenta ligeramente el espesor uniforme E. En rigor, el aumento es menor que el término suprimido, pues si al hacer la transformación del perfil primitivo se tuviese en cuenta el triángulo ADL de que hemos prescindido, se hallaría para el espesor uniforme un resultado un poco superior al que resulta de la anterior expresión de E_1. Tratándose de un arco carpanel, la altura h es igual á 0,15 A; por lo tanto, el término negativo se reduce á la mitad. Por último, para un arco escarzano este término es aún mucho menor y solo da un número pequeño de centímetros.

343. Resulta de las anteriores consideraciones, que para calcular el espesor *uniforme* de los estribos, debe añadirse el término 0,18 H á las fórmulas que dan el espesor de arranques para estribos con talud de $\frac{1}{5}$, obteniéndose así las siguientes:

FÓRMULAS PARA HALLAR EL ESPESOR UNIFORME DE LOS ESTRIBOS.

Para los medios puntos. . . .	$E_1 = 0{,}40 + 0{,}19A + 0{,}18\ H$
Arcos circulares rebajados á $\frac{1}{4}$.	$E_1 = 0{,}40 + 0{,}22A + 0{,}18\ H$
» » » $\frac{1}{6}$.	$E_1 = 0{,}40 + 0{,}26A + 0{,}18\ H$
» » » $\frac{1}{8}$.	$E_1 = 0{,}40 + 0{,}31A + 0{,}18\ H$
» » » $\frac{1}{10}$.	$E_1 = 0{,}40 + 0{,}37A + 0{,}18\ H$
Arcos carpaneles rebajados á $\frac{1}{3}$.	$E_1 = 0{,}40 + 0{,}26A + 0{,}18\ H$

Arcos carpaneles rebajados á $\frac{1}{4}$. $E_1 = 0,40 + 0,31\,A + 0,18\,H$

» » » $\frac{1}{5}$. $E_1 = 0,40 + 0,37\,A + 0,18\,H$

Arcos ojivales. . . . . $E_1 = 0,40 + 0,12\,A + 0,18\,H$

Conviene advertir que, á igualdad de resistencia al giro, el estribo con talud exige un volumen de mampostería inferior al del estribo rectangular; ofrece, además, el primero la ventaja de aumentar la latitud de la base, y á la par que separa la arista de rotación de la resultante de las presiones, produce una reducción de la presión máxima unitaria. La única ventaja inherente á la forma rectangular, consiste en contrarrestar mejor el empuje del terraplén; así es que en algunos casos que examinaremos más adelante, al tratar de la resistencia de los estribos al aplastamiento, será conveniente tener presente esta forma, por más que ofrezca menor economía.

Se entiende que para los estribos de los puentes, así como para los muros de sostenimiento, el paramento inclinado en contacto con las tierras, lo mismo puede disponerse con retallos, que formando una superficie continua.

344. Fácil es ahora establecer la comparación entre los espesores de estribo procedentes de las fórmulas propuestas y los que resultan de aplicar las siguientes de Leveillé y de Lesguillier.

FÓRMULAS DE LEVEILLÉ PARA HALLAR EL ESPESOR DE LOS ESTRIBOS.

Medios puntos.... $E = (0,60 + 0\ 162A)\sqrt{\dfrac{\left(H + \frac{1}{4}A\right)\ 0,865\ A}{s\left(e + \frac{1}{4}A\right)}}$.

Arcos escarzanos. $E = (0,33 + 0,212A)\sqrt{\dfrac{HA}{s\,(f + e)}}$.

Arcos carpaneles. $E = (0,43 + 0,154A)\sqrt{\dfrac{(H + 0,54\ A)\ 0,84\ A}{s\ (e + 0,465\ f)}}$.

FÓRMULAS DE LESGUILLIER PARA HALLAR EL ESPESOR DE LOS ESTRIBOS.

Medios puntos..... $E = \sqrt{A}\ (0,60 + 0,04\ H).$

Arcos escarzanos. $E = \sqrt{A}\left[0,60 + 0,10\left(\frac{A}{f} - 2\right) + 0,04H\right].$

Arcos carpaneles. $E = \sqrt{A}\left[0,60 + 0,05\left(\frac{A}{f} - 2\right) + 0,04H\right].$

En estas fórmulas se representa por

A, la luz de la bóveda;

f, la flecha de la misma;

e, el espesor de clave;

H, la altura de arranques sobre la base de los estribos;

s, la altura de la rasante del camino sobre esta misma base.

Para calcular esta última altura se supone que sobre el trasdos de la bóveda existe una capa de $0^m,60$ de grueso formado por la sobrecarga de tierra y por el piso de la vía, de manera que $s = H + f + e + 0^m,60$.

Hemos calculado el siguiente cuadro comparativo, indicando, para cada luz y para distintas alturas, los espesores de estribo obtenidos al aplicar las fórmulas de Leveillé y de Lesguillier, así como los que proponemos para el caso de ser estos espesores uniformes.

345. El examen del cuadro que antecede da lugar á las siguientes observaciones.

Se nota en primer lugar cierta anomalía en la ley de crecimiento que siguen los resultados de las fórmulas de Leveillé y de Lesguillier, ya sea con respecto á las variaciones de la luz, ya teniendo en cuenta las distintas alturas de estribo. No debe, sin embargo, sorprendernos esto, pues los citados ingenieros han tratado de amoldar sus expresiones empíricas á los espesores existentes en varias obras de un mérito indiscutible, y cuya resistencia ha sido sancionada por la práctica. Pero es imposible que los autores de estas obras hayan sometido sus cálculos á los mismos principios teóricos, ni hayan tampoco fijado un mismo grado de estabilidad á la construcción, adoptando coeficientes de resistencia, que podrán ofrecer notables divergencias motivadas por muchas causas, como por ejemplo, por ciertas condiciones especiales de cimentación.

En un gran número de casos, los espesores dados por nuestras fórmulas se hallan comprendidos entre los que resultan de aplicar las de Leveillé y de Lesguillier; cuando no sucede así, superan á los procedentes de ambas. Las diferencias en más alcanzan cierto valor en los arcos circulares rebajados de gran luz y para pequeñas alturas de estribo; pero es, sobre todo, tratándose de arcos carpaneles, cuando nuestros espesores presentan generalmente excesos de alguna importancia. Sin embargo, las expresiones que proponemos para esta clase de arcos han sido deducidas siguiendo el mismo método empleado para las otras formas de intrados; creemos, por lo tanto, poder afirmar que muchos constructores no dan al empuje de los arcos elípticos ó carpaneles todo el valor que les corresponde. Los resultados de Lesguillier, especialmente, pecan por defecto, pues asignan á los estribos de estos arcos espesores más pequeños aún que á los circulares rebajados de igual flecha, lo cual no puede admitirse.

Acaso se objete á esto que son muchas las obras de esta naturaleza que resisten perfectamente con dimensiones de estribo inferiores á las propuestas; podrán, por lo tanto, parecer

estas últimas un poco crecidas; pero haremos notar que para los anchos ordinarios de las vías de comunicación, cuando un puente se ha dispuesto con muros de acompañamiento, éstos forman contrafuertes que aumentan considerablemente la resistencia del estribo. Se podría, con semejante disposición, reducir un 5 por 100 de la luz el espesor calculado con nuestras fórmulas; pero no aconsejamos llevar á cabo la disminución cuando el puente va acompañado con muros en ala, ó si la bóveda tiene gran longitud.

Las fórmulas propuestas no se hallan exentas de crítica; en efecto, como han sido establecidas partiendo de la cantidad máxima hallada para espesor de arranques, resulta con esto un pequeño exceso de estabilidad para alturas de estribo menores que la relativa al máximo. Sin embargo, este exceso no dará lugar en general á un gran aumento en el volumen de fábrica empleada, pues por lo regular, en la mayoría de los casos prácticos los estribos tendrán una altura superior á la del máximo. Además, si así no fuese, podrá limitarse el espesor á lo que señalan los cuadros calculados; pero si se dispone el estribo con talud de $\frac{1}{5}$ del lado de las tierras, disposición que hemos patrocinado como regla general, no será conveniente extender la reducción al caso de alturas superiores á las del máximo, pues de lo contrario, disminuiríamos la estabilidad de giro alrededor de las aristas pertenecientes á los planos de asiento, situadas á un nivel próximo al del referido máximo, planos en los que debe suponerse no existir ninguna trabazón.

346. Las fórmulas de Lesguillier, y lo mismo las que proponemos, prescinden por completo de las fuertes cargas de tierra que existen sobre la bóveda de algunas obras destinadas á establecer un paso á través de un gran terraplén; también sucede así con la mayor parte de las fórmulas ó cuadros de espesores presentados por otros autores. No juzgamos necesario adoptar en este caso disposiciones especiales, ni aumentar el espesor de estribos en dichas obras, pues dado el objeto de su construcción, nunca presentan ni gran elevación ni gran luz;

además, aunque por un lado la sobrecarga tienda á aumentar el empuje de la bóveda, existe por otro en sentido contrario mayor empuje de tierra sobre el estribo, que compensa el aumento.

Las fórmulas de Leveillé tienen en cuenta la sobrecarga de tierra, y lo mismo sucede con las siguientes, empleadas en Rusia y en Alemania.

FÓRMULAS EMPLEADAS EN ALEMANIA Y EN RUSIA PARA HALLAR EL ESPESOR DE ESTRIBOS.

Medios puntos..... $E=0,305+\frac{5}{24}A+\frac{H}{6}+\frac{h}{12}$.

Arcos circulares rebajados y carpaneles. . . . . $E=0,305+\frac{A}{8}\left(\frac{3A-f}{A+f}\right)+\frac{H}{6}+\frac{h}{12}$.

Las anotaciones son las mismas; designa además h la altura de la sobrecarga sobre la bóveda.

Sin necesidad de aplicar las anteriores fórmulas á varios casos particulares, es muy fácil compararlas con las expresiones que proponemos para el mismo objeto de hallar el espesor uniforme de estribos. Bastará hacer sucesivamente en las primeras $f=\frac{A}{4}$, $f=\frac{A}{6}$, $f=\frac{A}{8}$, y dar á h el valor $0^m,60$, empleado al aplicar las fórmulas de Leveillé.

Con estas sustituciones se obtiene

Medios puntos. . . . . $E=0,355+0,208\,A+0,17\,H.$

Arco rebajado á $\frac{1}{3}$ . . . . . $E=0,355+0,250\,A+0,17\,H.$

» » $\frac{1}{4}$ . . . . . $E=0,355+0,275\,A+0,17\,H.$

» » $\frac{1}{6}$ . . . . . $E=0,355+0,303\,A+0,17\,H.$

» » $\frac{1}{8}$ . . . . . $E=0,355+0,355\,A+0,17\,H.$

Se observa por de pronto una gran analogía de forma entre estas expresiones y las que hemos propuesto; además, los términos independientes y los coeficientes de H son casi los mismos en unas y otras. En lo referente á los coeficientes de A, puede decirse que tampoco se diferencian mucho en los medios puntos; pero son más crecidos los valores que asignan las fórmulas alemanas á los arcos circulares rebajados, y menores tratándose de arcos carpaneles.

El coeficiente $\frac{3A - f}{A + f}$ de estas mismas fórmulas que estamos examinando se aplica á una relación cualquiera entre la flecha y la luz, pero no se presta á la proporcionalidad que conviene establecer entre los factores de la luz; por lo tanto, consideramos más sencillo y de más rápida aplicación el empleo de los diversos coeficientes numéricos de A señalados en nuestras expresiones.

Puédese, si se quiere, adoptar el término $\frac{h}{12}$, añadiéndolo á las fórmulas propuestas, cuando se trate de grandes sobrecargas de tierra; equivaldría esto á aumentar el grueso de estribos $0^m,08$ para cada metro de altura del terraplén sobre la bóveda.

347. El examen comparativo que hemos hecho entre nuestras fórmulas por un lado, y las de Leveillé y de Lesguillier por otro, fundadas las últimas en datos prácticos, parece en rigor suficiente para poder deducir como consecuencia, que son admisibles los espesores de estribo obtenidos con las primeras, debiendo éstos colocar la obra en buenas condiciones de resistencia, no solo al giro, sino también al aplastamiento de los materiales.

Sin embargo, indagaremos la resistencia de esta última clase, que presenta un puente de alguna importancia, lo cual servirá de complemento al estudio de aplicación referente á la estabilidad de las bóvedas.

Tomemos como ejemplo un medio punto de 20 metros de diámetro, con espesor uniforme de $0^m,89$, y cuyos estribos,

dispuestos con talud interior de $\frac{1}{5}$, prolongado por encima de una altura igual á 0,3 de la luz, tendrán en los arranques un espesor de $4^m,20$ obtenido con nuestra fórmula $E=0,40+0,19\,A$. Tratándose de averiguar la máxima presión unitaria en la base de dichos estribos, evidente es que será preciso atender á todas las sobrecargas susceptibles de actuar en la bóveda.

Supongamos que sobre esta se ha colocado un terraplén terminado al nivel CF de la explanación (fig. 179), situada $0^m,60$ por encima del trasdos de la clave. Habrá que dividir el macizo formado por el conjunto de la bóveda y de la sobrecarga en fajas verticales de igual ancho, de un metro por ejemplo; se reducirá luego la longitud de cada una de los verticales, comprendida entre el trasdos y la rasante, en la relación de densidades de la tierra y de la mampostería, relación que hacemos igual á 0,8. Esta reducción da lugar á la línea KB, sobre la que suponemos colocada una capa de fábrica EDBK de 0,25 de grueso, para representar la carga móvil; equivale esta capa á un peso, uniformemente distribuído, de 550 kilogramos por metro cuadrado. Trátase ahora de hallar el punto de rotura de la bóveda con la sobrecarga de mampostería limitada por la línea ED; para esto, se aplicará el método de la curva de error indicado en el capítulo que precede (**256**), obteniéndose el punto charnela S, que debe satisfacer á la condición de cortar la tangente trazada en este punto de intrados á la horizontal del empuje, en el mismo sitio que la vertical UV del centro de gravedad del macizo EISTN.

Hállase de esta manera:

para el peso de este macizo. . . . . $33,983\,\delta'$
para su brazo de palanca US con respecto á S. . $2^m,76$
para el brazo de palanca UV del empuje.. . . . $6^m,50$;

de donde resulta para la intensidad del empuje

$$Q = 33,983\,\delta' \times \frac{2,76}{6,50} = 14,429\,\delta'.$$

Advertiremos de paso que la posición del punto de rotura ha bajado mucho por efecto de la sobrecarga, puesto que cuando esta no existía se hallaba $3^m,87$ por bajo de la horizontal del empuje en la clave (véase el cuadro núm. 57 de espesores de estribos para medios puntos (**340**), mientras que este punto está ahora situado á $6^m,50$ de la misma horizontal.

Se determinará el volumen del estribo, que supondremos prolongado por arriba hasta ND, á fin de tener en cuenta la sobrecarga, y se designará siempre por H la altura de arranques sobre la base del mismo. Añadiendo á dicho volumen el del macizo EISTN, se obtiene para la suma de los pesos

$$\Sigma P = (69{,}084 + 4{,}20\, H + 0{,}1\, H^2)\, \delta'.$$

Trasladando al punto S el peso de la semibóveda con sobrecarga, así como el empuje horizontal que produce, será fácil hallar el momento de estas fuerzas y también el del peso del estribo con respecto á la arista de la base que está en contacto con el terraplén. Se obtiene para el momento de los pesos

$$\mathcal{M}\, \Sigma P = (262{,}6428 + 22{,}636\, H + 0{,}84\, H^2 + 0{,}0133\, H^3)\, \delta',$$

y para el momento del empuje

$$\mathcal{M}\, Q = 14{,}429\, \delta'\, (3{,}95 + H) = (56{,}9945 + 14{,}429\, H)\, \delta'.$$

Como estos momentos obran en sentido contrario, su diferencia dará la suma algebráica de momentos, que dividida por la suma de los pesos produce, como sabemos, la distancia de la resultante á la arista de giro. Resulta, pues,

$$d = \frac{\Sigma\, \mathcal{M}}{\Sigma P} = \frac{205{,}6482 + 8{,}207\, H + 0{,}84\, H^2 + 0{,}0133\, H^3}{69{,}084 + 4{,}20\, H + 0{,}1\, H^2}.$$

Asignando diferentes valores á H, se obtienen las distancias d correspondientes á cada altura de estribo, las cuales permi-

33

ten trazar la curva de presión por bajo de los arranques. Por último, si se aplican las respectivas distancias y pesos á la ley del trapecio, se determinará la presión unitaria máxima en las diferentes bases ó secciones horizontales del estribo.

Con los resultados podrá formarse el siguiente cuadro, en el que se indican, además de las distancias y de las presiones, los anchos de base y las sumas de los pesos.

NÚMERO 64

CUADRO *de máximas presiones en la base de los estribos con paramento interior inclinado, para un puente de medio punto de* 20 *metros de luz, teniendo en cuenta las sobrecargas.*

Altura de arranques. H	Latitud de la base. B	Pesos sobre la base. ΣP	Distancia de la resultante. d	Presiones máximas en la base. ρ
m.	m.	K.	m.	K.
2,00	4,60	171.345	2,89 1,71	65.860
5,00	5,20	203.684	2,91 2,29	53.197
10,00	6,20	266.385	3,18 3,02	46.316
20,00	8,20	424.749	3,94 4,26	57.190

Las dobles distancias indicadas en este cuadro para cada altura de estribo se refieren, la primera á la que media entre la resultante y el paramento en contacto con el terraplén, distancia que se deduce directamente de la anterior expresión de d; la segunda forma el complemento del ancho de base. Se ve que para las tres primeras alturas la curva de presion se separa más del citado paramento que del opuesto; por lo tanto, en este último se verificará la máxima presión. Lo contrario tiene

lugar con la altura de estribo de 20 metros. Todas las distancias d resultan mayores que el tercio de la base, y esto indica que ha sido necesario emplear la primera de las dos fórmulas del trapecio.

Las presiones máximas obtenidas son muy admisibles en la práctica, pudiendo deducirse de esta circunstancia que, en la mayoría de los casos, los anchos de estribo en los arranques, procedentes de la fórmula propuesta $E = 0{,}40 + 0{,}19\ A$ relativa á los medios puntos, y disponiendo además el paramento interior con talud de $\frac{1}{5}$, proporcionan á la obra la conveniente resistencia.

348. El estudio que acaba de hacerse no es aún suficiente, por cuanto no hemos tenido en cuenta el empuje del terraplén que se sitúa detrás de los estribos, formando las avenidas del puente; puede este empuje adquirir gran importancia y aumentar considerablemente la presión en la base. Para hacernos cargo de lo que sucede en semejantes circunstancias, supondremos que el empuje de las tierras obra sobre el paramento del estribo prolongado hasta el nivel superior de la vía. Hemos visto (**72**, cuadro núm. 4), que la intensidad del empuje sobre un paramento inclinado á $\frac{1}{5}$ estaba representado en kilogramos por el factor 238,15 multiplicado por el cuadrado de la altura del terraplén, y que actuaba al tercio de la misma, normalmente al paramento. Se compone dicha altura en este caso de la de arranques H y de la altura constante de la vía sobre estos arranques y que llamaremos h. Será, pues, el empuje de las tierras

$$238{,}15 \times (H + h)^2,$$

y su momento

$$238{,}15\ (H + h)^2 \times 0{,}34\ (H + h) = 80{,}971\ (H + h)^3.$$

Este momento obra en sentido contrario al del empuje de la bóveda; deberá, pues, añadirse al numerador de la expresión

de d; pero como en este numerador se ha omitido la densidad de la mampostería, que entraba también como factor en el denominador, será preciso dividir por 2.200 el momento del empuje de las tierras, y resultará 0,0368 para el coeficiente de $(H + h)^3$.

Este mismo empuje, que es oblicuo, da lugar á una componente vertical representada por

$$238{,}15\,(H + h)^2 \times \text{sen. } 11^\circ 19' = 46{,}738\,(H + h)^2;$$

dividiendo también por 2.200 esta componente, se obtiene

$$0{,}02124\,(H + h)^2,$$

para la cantidad que hay que agregar al denominador representativo de la suma de fuerzas verticales; será, pues, la nueva distancia de la resultante á la arista de giro

$$d = \frac{205{,}6482 + 8{,}207\,H + 0{,}84\,H^2 + 0{,}0133\,H^3 + 0{,}0368\,(H + h)^3}{69{,}084 + 4{,}20\,H + 0{,}1\,H^2 + 0{,}02124\,(H + h)^2},$$

y podremos calcular el siguiente cuadro.

NÚMERO 65

CUADRO *de máximas presiones en la base de los estribos con paramento inclinado, para un puente de medio punto de* 20 *metros de luz, teniendo en cuenta las sobrecargas y el empuje de las tierras.*

Altura de arranques. H	Ancho de la base. B	Pesos sobre la base. ΣP	Distancias de la resultante. d	Presiones máximas. ρ
m.	m.	K.	m.	K.
2,00	4,60	181.117	3,67 0,93	129.833
5,00	5,20	215.272	4,02 1,18	121.622
10,00	6,20	286.477	5,48 0,72	265.256
20,00	8,20	468.989	8,60 — 0,40	∞

Los resultados de este cuadro demuestran que el empuje de las tierras acerca mucho la curva de presión al paramento visto del estribo, y que pasa más allá de este paramento cuando la altura es de 20 metros, lo que denota falta de equilibrio. Como consecuencia de esto, las presiones máximas son más considerables y llegan á ser infinitas antes de alcanzar la citada altura de 20 metros. Resulta de aquí que si debiera tenerse en cuenta el empuje de las tierras sobre la totalidad del paramento del estribo, sería forzoso modificar la disposición de este macizo; es precisamente el caso en que convendría admitir la forma rectangular, por más que á igualdad de resistencia al giro presente un volumen superior al de la forma trapezoidal con talud de $\frac{1}{5}$.

349. El ancho uniforme de estribos estaría dado entonces por la fórmula $E = 0,40 + 0,19\ A + 0,18\ H$, (**343**); podrían calcularse la suma de los pesos y sus momentos referidos á la arista de giro, y se obtendría

$$\Sigma P = (81,646 + 6,144\ H + 0,18\ H^2)\delta',$$

$$\mathcal{M}\ \Sigma P = (272,7425 + 23,4278\ H + 0,931\ H^2 + 0,0162\ H^3)\ \delta'.$$

Hay que deducir de este momento el relativo al empuje de la bóveda, que no ha variado; por lo tanto, si por de pronto hacemos caso omiso del empuje de las tierras, se halla

$$d = \frac{\Sigma \mathcal{M}}{\Sigma P} = \frac{215,7480 + 8,9988 H + 0,931 H^2 + 0,0162 H^3}{81,646 + 6,144\ H + 0,18\ H^2},$$

y puede formarse el cuadro que sigue.

NÚMERO 66

CUADRO *de máximas presiones en la base de los estribos de espesor uniforme, para un puente de medio punto de 20 metros de luz, teniendo en cuenta las sobrecargas.*

Alturas de arranques. H	Ancho uniforme de estribos. B	Pesos sobre la base. ΣP	Distancias de la resultante. d	Presiones máximas. ρ
m.	m.	K.	m.	K.
2,00	4,56	209.541	2,50 2,06	59.278
5,00	5,10	257.105	2,45 2,65	44.362
10,00	6,00	354.333	2,57 3,43	83.043
20,00	7,80	608.357	3,24 4,56	117.624

Todas las distancias de la resultante á los paramentos son mayores que el tercio de la base; por lo tanto, para el cálculo de ρ ha sido preciso emplear la primera de las dos fórmulas del trapecio. Las presiones máximas en la base de los estribos de forma rectangular, y para alturas de 10 metros y mayores, exceden de las que hallamos para la forma trapezoidal con talud de $\frac{1}{5}$ (cuadro núm. 64). Lo contrario sucede con pequeñas alturas de 2 y 5 metros; sin embargo, en este caso son aceptables las presiones relativas á esta última forma, según vimos. Puede, pues, establecerse, que siempre que no deba atenderse al empuje de las tierras, será más económico, y por tanto más conveniente, disponer el estribo con talud.

350. Examinemos ahora la influencia ejercida por el empuje de las tierras sobre la misma bóveda con estribos de espesor uniforme.

Este empuje, actuando ahora sobre un paramento vertical, es igual al cuadrado de la altura multiplicado por 174 (**72**, cuadro núm. 4); dicha altura es siempre $H + h$; tenemos, pues, para el citado empuje, que es horizontal,

$$174\,(H + h)^2$$

y para su momento

$$174(H + h)^2 \times \frac{1}{3}\,(H + h) = 58\,(H + h)^3 = 0{,}0264\,(H + h)^3 \times \delta';$$

este momento se añade al numerador de la expresión de d, y resulta

$$d = \frac{\Sigma\mathcal{M}}{\Sigma P} = \frac{215{,}748 + 8{,}9988H + 0{,}931H^2 + 0{,}0162H^3 + 0{,}0264\,(H + h)^3}{81{,}646 + 6{,}144\,H + 0{,}18\,H^3},$$

obteniéndose además los siguientes resultados

NÚMERO 67

CUADRO *de máximas presiones en la base de los estribos de espesor uniforme, para un puente de medio punto de 20 metros de luz, teniendo en cuenta las sobrecargas y el empuje de las tierras.*

Alturas de arranques. H	Ancho uniforme de estribos. B	Peso sobre la base. ΣP	Distancias de la resultante. d	Presiones máximas. ρ
m.	m.	K.	m.	K.
2,00	4,56	209.541	3,07 1,49	93.754
5,00	5,10	257.105	3,34 1,76	97.296
10,00	6,00	354.393	4,04 1,96	120.541
20,00	7,80	608.357	6,02 1,78	227.849

Al comparar este cuadro con el número 65, relativo á estribos con talud, y atendiendo al empuje del terraplén, se ve que las máximas presiones en la base disminuyen mucho al disponer el estribo con sección rectangular; sin embargo, para alturas de 10 y 20 metros son aún estas presiones demasiado crecidas, especialmente la última; pero podrán reducirse á un límite aceptable dando un poco de talud al paramento visto del estribo; es, además, lo que se hace para los grandes viaductos. Así, por ejemplo, fijando este talud en $\frac{1}{10}$, se aumenta en 2 metros el ancho de base para 20 metros de altura de arranques, y la presión máxima es entonces próximamente de 8,50 kilogramos por centímetro cuadrado.

Advertiremos de paso que, dando á los estribos el espesor uniforme que resulta de las fórmulas de Leveillé y de Lesguillier (**344**), podrá en muchos casos hallarse la obra en malas condiciones de resistencia al aplastamiento, puesto que para un medio punto de 20 metros de luz y 20 de altura de arranques, se obtiene con la primera $5^m,86$, y aplicando la segunda $6^m,26$; es evidente que con semejantes espesores han de resultar presiones inadmisibles. Viene esto en apoyo de la preferencia que creemos debe darse á nuestras fórmulas.

351. El método que hemos empleado para determinar la influencia ejercida por el empuje del terraplén sobre la presión máxima en la base del estribo no es completamente exacto; en rigor conviene introducir en él una ligera corrección, que vamos á indicar.

La acción de las tierras sobre la parte superior IF del paramento (fig. 180), situada por encima del punto de rotura, se trasmite á la bóveda aumentando su empuje, y como este entra con signo negativo en el numerador de la expresión de d, resulta disminuída esta distancia, con lo cual la curva de presión se acerca más al paramento que está en contacto con el terraplén, y la máxima presión en el paramento opuesto decrece también.

Con objeto de apreciar esta modificación, puede suponerse

que el empuje de las tierras sobre IF, empuje que designaremos por q y actúa en J al tercio de esta altura, se descompone en dos fuerzas horizontales aplicadas en M y en I, es decir, al nivel de la horizontal del empuje de la bóveda en la clave y al nivel del punto de rotura. Sean a y b las distancias JI, JM; tendremos para la primera componente

$$q \times \frac{a}{a + b},$$

y para la segunda

$$q \times \frac{b}{a + b}.$$

Es evidente que cada semibóveda tendrá que resistir al empuje de la otra mitad aumentado con la componente en M; por lo tanto, el empuje horizontal en la clave, que antes era Q, tendrá ahora por valor

$$Q + q \times \frac{a}{a + b},$$

y para formar el numerador de la expresión de d, habrá que considerar:

1.° El momento de este nuevo empuje de la bóveda, que es negativo.

2.° Los momentos de los pesos de la bóveda y del estribo con sus respectivas sobrecargas.

3.° El momento de la componente $q \times \frac{b}{a + b}$, aplicado en I.

4.° Por último, el momento del empuje de las tierras sobre la parte de paramento comprendida entre el punto I y la base del estribo.

La influencia que esta corrección ejerce sobre la presión máxima en la base es de escasa importancia, pudiendo omitirse en los cálculos. Nos limitaremos á indicar que para el

mismo puente de 20 metros de luz y 20 de altura de arranques, solo produce una disminución de 3 kilogramos en la presión máxima que, según vimos en el último cuadro, era de $22^{k.},7849$ por centímetro cuadrado.

352. Hagamos ahora un estudio análogo aplicándolo á un puente de 20 metros de luz con intrados circular rebajado á $\frac{1}{4}$, disponiendo el paramento interior del estribo con talud de $\frac{1}{5}$.

El espesor de este estribo en los arranques es, según nuestra fórmula (**341**), $E = 0,40 + 0,22\ A = 4^{m},80$.

Además, siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene:
para el peso de la semibóveda con la sobrecarga. . $33,87\ \delta'$
para el brazo de palanca de este peso. . . . . . $3^{m},25$
para el brazo de palanca del empuje en la clave. . $5^{m},45$
por último, el empuje resulta ser

$$Q = 33,87 \times \frac{3,25}{5,45} \times \delta' = 20,967\ \delta'.$$

Si por de pronto no se atiende al empuje de las tierras, se halla para la distancia de la resultante á la arista de giro

$$d = \frac{\Sigma\mathcal{M}}{\Sigma P} = \frac{212,281 + 1,579\ H + 0,96\ H^2 + 0,013\ H^3}{55,23 + 4,8\ H + 0,1\ H}.$$

Con la cual, y haciendo variar H, podremos formar el siguiente cuadro:

NÚMERO 68

CUADRO *de presiones máximas en la base de los estribos con paramento inclinado, para un puente de 20 metros de luz rebajado al* $\frac{1}{4}$, *y teniendo en cuenta las sobrecargas.*

Altura de arranques. H	Ancho de la base. B	Pesos sobre la base. ΣP	Distancias de la resultante. d	Presiones máximas. ρ
m.	m.	K.	m.	K.
2,00	5,20	143.506	3,36 1,84	51.854
5,00	5,80	179.806	3,00 2,80	34.225
10,00	6,80	249.106	2,98 3,82	50.187
20,00	8,80	420.706	3,82 4,98	67.404

Los valores de ρ no exceden de los límites admisibles.

Para conocer la influencia del empuje del terraplén sobre la presión en la base, haremos lo mismo que para el medio punto con estribo trapezoidal (**348**), es decir, que se añadirá al numerador de la expresión de d el término $0{,}0368\ (H + h)^3$, y al denominador $0{,}02124\ (H + h)^2$. La letra h representa la altura de la rasante del camino sobre los arranques. Tendremos

$$d = \frac{212{,}281 + 1{,}579H + 0{,}96H^2 + 0{,}013H^3 + 0{,}0368(H+h)^3}{55{,}23 + 4{,}8\ H + 0{,}1\ H^2 + 0{,}02124\ (H + h)^2},$$

y formaremos el estado que sigue:

NÚMERO 69

CUADRO *de presiones máximas en la base de los estribos con talud, para un puente de 20 metros de luz rebajado al* $\frac{1}{4}$, *teniendo en cuenta las sobrecargas y el empuje de las tierras.*

Alturas de arranques. H	Ancho de la base. B	Pesos sobre la base. ΣP	Distancias de la resultante. *d*	Máximas presiones. ρ
m.	m.	K.	m.	K.
2,00	5,20	146.873	3,62 1,58	61.971
5,00	5,80	185.966	3,57 2,23	54.315
10,00	6,80	261.823	4,22 2,58	66.379
20,00	8,80	453.508	6,87 1,93	156.652

Para alturas de arranques superiores á 10 metros la presión va tomando valores algo crecidos. Siendo de 20 metros la altura, el trabajo máximo de la fábrica llega á la cantidad de 15k.,66 por centímetro cuadrado, cantidad que podría reducirse á poco más de 10 kil., dando al paramento visto del estribo un talud de $\frac{1}{10}$.

353. Presentamos á continuación dos cuadros, que contienen los resultados de cálculos análogos aplicados á un puente de 20 metros de luz con intrados circular rebajado á $\frac{1}{8}$ y con estribos trapezoidales, sin tener en cuenta el empuje de las tierras en uno de estos cuadros y contando con este empuje en el otro.

NÚMERO 70

CUADRO *de presiones máximas en la base de los estribos con paramento inclinado, para un puente de 20 metros de luz rebajado á* $\frac{1}{8}$ *, teniendo en cuenta las sobrecargas.*

Altura de arranques. H	Ancho de la base. B	Pesos sobre la base. ΣP	Distancias de la resultante. *d*	Presiones máximas. ρ
m.	m.	K.	m.	K.
2,00	7,00	130.803	3,93 3,07	25.562
5,00	7,60	178.983	3,15 4,45	35.654
10,00	8,60	268.083	2,94 5,66	60.786
20,00	10,60	479.283	3,84 6,76	82.652

NÚMERO 71

CUADRO *de presiones máximas en la base de los estribos con talud, para un puente de 20 metros de luz rebajado á* $\frac{1}{8}$ *, teniendo en cuenta las sobrecargas y el empuje de las tierras.*

Altura de arranques. H	Ancho de la base. B	Pesos sobre la base. ΣP	Distancias de la resultante. *d*	Presiones máximas. ρ
m.	m.	K.	m.	K.
2,00	7,00	134.167	4,20 2,80	30.666
5,00	7,60	183.656	3,51 4,09	29.746
10,00	8,60	278.597	3,81 4,79	43.474
20,00	10,60	508.488	6,11 4,49	70.036

Si se comparan los dos cuadros que anteceden, se observa que en un puente rebajado á $\frac{1}{8}$ y para las tres últimas alturas de arranques, el empuje del terraplén disminuye la presión máxima en la base en vez de aumentarla, acercando la curva de presion al centro del estribo y alejándola del paramento que está en contacto con las tierras, en donde se verificaba la máxima presión.

Todas estas presiones son admisibles, y también se hallan en igual caso las que se han obtenido con la bóveda rebajada á $\frac{1}{4}$, exceptuando empero la correspondiente á una altura de arranques de 20 metros. Pero haremos observar que cuando se trata de proyectar una obra de gran elevación se adopta en la práctica un intrados de medio punto con preferencia á un arco rebajado que, en semejantes circunstancias, casi nunca tiene razón de ser, ni como cuestión de estética, ni como conveniencia. Podemos, pues, deducir de lo que antecede, que para esta última forma de intrados no hay necesidad de adoptar la sección rectangular de estribo, puesto que exige un mayor volumen de fábrica, siendo más económico disponer el paramento interior con talud de $\frac{1}{5}$ y asignar como espesor de arranques el que resulta de nuestras primeras fórmulas independientes de la altura (**341**).

Así, pues, únicamente habrá acaso necesidad de atender al empuje del terraplén en los puentes cuyo intrados es de medio punto, disponiendo los estribos con paramento interior vertical. Hemos visto que aun para esta disposición se llega á una presión máxima superior á 19 kilogramos por centímetro cuadrado, cuando los estribos tienen 20 metros de altura; vimos también que podía reducirse esta presión á $8^{k.},50$, dando al paramento visto un talud de $\frac{1}{10}$; pero si, como con frecuencia sucede, se limita este talud á $\frac{1}{20}$, por más que se tenga en

cuenta la reducción motivada por el empuje de las tierras sobre la bóveda, se pasa aún de 10 kilogramos por centímetro cuadrado, lo que constituye una carga demasiado fuerte, susceptible de exigir un suplemento de espesor en los estribos.

354. Debemos hacer una advertencia muy importante. Los cálculos que nos han permitido apreciar la influencia del empuje de las tierras sobre la presión en la base, suponen que dicho empuje actúa sobre toda la longitud de estribo comprendida entre los frentes de la obra; pero únicamente podrá suceder esto si el puente está dispuesto con muros en ala, pues es evidente que si éstos son de acompañamiento, su espesor reducirá considerablemente la superficie interior del estribo que recibe la acción del terraplén. Al tratar de estos muros en el capítulo IV (**139**), vimos que para una latitud de explanación de 8 metros, por ejemplo, el terraplén colocado entre estos muros no bajaba más allá de 8 á 10 metros, á contar desde arriba, formando el resto de la altura, hasta la base de la obra, un macizo de fábrica continuo de uno á otro lado. La sección trasversal del terraplén queda, pues, muy reducida en latitud y en altura, resultando forzosamente una gran disminución de empuje, el cual, según sabemos, varía como el cuadrado de la altura de tierra y debe distribuirse sobre toda la longitud del estribo entre los frentes. Por otro lado, los muros de acompañamiento constituyen, con respecto al terraplén, contrafuertes interiores que aumentan considerablemente la resistencia del estribo; se deduce de aquí que, aun para puentes de medio punto con muros de acompañamiento, puede también adoptarse la sección de estribo propuesta de forma trapezoidal.

No sucede lo mismo con los muros en ala; así es que creemos oportuno llamar la atención sobre los inconvenientes que pueden presentar dichos muros cuando se aplican á obras de gran elevación. En semejantes casos no deberá nunca perderse de vista la influencia del empuje del terraplén, á fin de estar seguro de la buena resistencia del estribo al aplastamiento.

355. Al examinar en el capítulo VI (**303**) la posibilidad del

deslizamiento de los estribos, dijimos que estaba indicada con preferencia en un puente de intrados circular muy rebajado, y que salvo el caso de descansar la base sobre un suelo arcilloso humedecido, bastaba tener contrarrestado este movimiento sobre el plano inferior de la hilada de los cojinetes, prolongada en todo el espesor de la fábrica. Se vió también que para conseguirlo era suficiente que el peso de la fábrica y sobrecarga, situados sobre dicho plano, fuesen superiores al empuje de la bóveda.

Verifiquemos, si estas condiciones quedan satisfechas, para un puente de 20 metros de luz rebajado al $\frac{1}{8}$, con estribos cuyo paramento interior está inclinado á $\frac{1}{5}$, dando además á los arranques el grueso que resulta de la fórmula (**341**) $E = 0{,}40 + 0{,}31\ A = 6^{m}{,}60$.

Prescindiendo primero de las sobrecargas, se halla:
para el empuje horizontal de la bóveda. . . . . 15,245 δ';
para el peso de la fábrica superior al plano de deslizamiento, comprendiendo el peso de la bóveda. 20,947 δ'.

Si se atiende á las sobrecargas, resulta:
para el empuje horizontal de la bóveda. . . . . 33,278 δ';
para los pesos con sobrecarga. . . . . 48,060 δ'.
No debe, pues, temerse el deslizamiento.

Es oportuno observar con este motivo, que no conviene hacer arrancar el plano ó superficie que termina la parte superior de los estribos de un punto K situado á un nivel inferior al de arranques (fig. 181), según se observa en algunas obras, pues con semejante disposición se disminuye la carga de mampostería y la superficie de deslizamiento, en la que obra como resistencia la cohesión de la fábrica, por más que de este elemento hayamos hecho abstracción. Es preciso trazar el citado plano partiendo del punto L, que se halla á la altura del trasdos de la junta de arranques, conforme hemos indicado (**335**), como regla general, para los arcos escarzanos.

CAPÍTULO VIII

APLICACIONES VARIAS

ESTRIBOS PARA PUENTES METÁLICOS DE ARCO

356. Bajo el punto de vista de los efectos producidos sobre los estribos, se dividen los tramos metálicos en dos grupos; tramos con empuje ó sin él. Los puentes de arco pertenecen al primero, y se comprenden en el segundo las vigas rectas de diferentes sistemas, como las de celosía, las americanas, de Linville, etc., y también las llamadas Bowstrings. Nos ocuparemos sucesivamente de los macizos de fábrica destinados á sostener las extremidades de los tramos pertenecientes á cada uno de estos dos grupos.

El empuje oblicuo, en los arranques de un arco metálico, puede reemplazarse por un empuje horizontal y una fuerza vertical equivalente al peso de la semi-estructura metálica con sus sobrecargas. Por lo tanto, el problema cuyo objeto consiste en determinar la latitud de estribo necesaria para el equilibrio, es completamente semejante al que hemos resuelto para los puentes con bóvedas de mampostería.

Partiendo de una forma asignada de antemano á la sección del estribo, puede tomarse como incógnita el ancho en los arranques ó en la base, y se obtendrá la solución formando la ecuación que establece la igualdad entre la suma de momentos de los pesos con respecto á la arista de giro de la base, por un lado, y por otro el momento del empuje multiplicado por un coeficiente de estabilidad mayor que 1.

Con la misma facilidad se obtiene la latitud de estribos, teniendo en cuenta la resistencia al aplastamiento. Se formará la expresión de la distancia d en función de la incógnita, y después de introducirla en una de las dos fórmulas de la ley del trapecio, así como también los pesos y el ancho de base, no quedará más que fijar para la presión máxima, designada por ρ, un valor numérico convenido, y resolver luego la ecuación resultante.

Siguiendo el mismo procedimiento, pero partiendo de un ancho fijo en la coronación del estribo, podría tomarse como incógnita la proyección horizontal del talud en contacto con las tierras. Si al mismo tiempo se subdivide el macizo de fábrica en fajas horizontales, la aplicación del cálculo á cada una de ellas dará por resultado un perfil de igual resistencia á la presión. Se disponen las operaciones según se tiene indicado para las presas de embalse; pero raras veces se adopta este perfil para los estribos de los puentes, pues en la mayoría de los casos no produciría gran economía de mampostería.

357. Con objeto de mantener el propósito principal que nos ha inducido á escribir esta obra, daremos también á conocer una fórmula que permita fijar rápidamente el ancho de estribos para un anteproyecto y evaluar con alguna aproximación el cubo de mampostería necesario, salvo las ligeras modificaciones que convenga introducir luego en los resultados, en cada caso particular, á consecuencia del estudio de estabilidad que exige siempre una obra de importancia, cuando se trata de un proyecto definido.

Indicaremos por de pronto la siguiente expresión:

$$E = 2^{m},00 + 0,07A.$$

A, designa siempre la luz del tramo; E, el espesor de arranques del estribo que se supone prolongado por arriba hasta la coronación, y con talud de $\frac{1}{5}$ del lado de las tierras, como en el caso de contrarrestar una bóveda de mampostería.

A fin de hacernos cargo de la validez de esta fórmula, y apreciar también las modificaciones que haya que introducir en los resultados con ella obtenidos, presentaremos en un solo cuadro, y para cuatro luces distintas de puente, las respectivas dimensiones y elementos de resistencia. Pero necesitamos antes entrar en algunos pormenores.

Según puede observarse, la fórmula es única; se aplica especialmente á la relación entre la flecha y la luz, que suele adoptarse con más generalidad para los puentes metálicos de arco, y es la de $\frac{1}{10}$. Si el intrados fuese mucho más ó menos rebajado que esta fracción, podrían apreciarse las modificaciones que convendría introducir en el estribo, comparando el verdadero empuje del arco con el que admitimos y se halla indicado en el cuadro mencionado.

Se ha adoptado para el peso por metro lineal del tramo metálico el que se deduce de la fórmula

$$p = 33A + 800;$$

y para la intensidad del empuje, el doble del peso del semitramo aumentado con la carga de prueba. En la mayoría de los casos prácticos se obtendrán resultados que no han de separarse mucho de los que se hallarían con la aplicación del verdadero empuje, obtenido por medio de los cálculos de resistencia de los sistemas elásticos.

358. Vamos á comprobar la estabilidad de los estribos, después de asignarles las dimensiones deducidas de la anterior expresión y de las reglas establecidas, tomando como ejemplo un puente de arco de 80 metros de luz.

Supondremos que la coronación del estribo se encuentra á nueve metros por encima de los arranques; en éstos el ancho de la fábrica es, según la fórmula, de $7^m,60$, de donde resulta para la coronación $5^m,80$; pero disminuiremos en $0^m,80$ esta última dimensión para formar el retallo y plano inclinado que recibe la caída del arco (fig. 182).

Tenemos para el peso del tramo metálico por metro lineal, según la expresión de p que antecede.	3.440 kilogramos.
Esta expresión se refiere á un puente para ferrocarril de una vía, agregándole para la sobrecarga de prueba. . . .	4.000 —
Se obtiene un peso total por metro de. .	7.440 —
De donde resulta para el peso de un semitramo. . . . . $7.440 \times 40 =$	297.600 —

Supondremos que la longitud de estribo, entre los planos de frente, es de 6 metros; tomando siempre para el peso del metro cúbico de mampostería la cantidad $\delta' = 2.200$ kilogramos, podrá expresarse el peso del semitramo correspondiente al metro lineal de estribo $\frac{297.600}{6} = 49.600 = 22{,}545 \times \delta'$.

Siendo H la altura de estribo hasta arranques, resulta para el peso del mismo $(53{,}10 + 7{,}60\,H + 0{,}1\,H^2)\delta'$; por lo tanto, la suma de los pesos será

$$\Sigma P = (22{,}545 + 53{,}10 + 7{,}60\,H + 0{,}1\,H^2)\,\delta',$$

y el momento de esta suma

$$\mathcal{M}\,\Sigma P = (365{,}51 + 44{,}01\,H + 1{,}52\,H^2 + 0{,}013\,H^3)\,\delta'.$$

Tomamos para el empuje del arco el doble del peso del semitramo, es decir, $2 \times 22{,}545 \times \delta'$; tendremos, pues, para el momento del empuje

$$\mathcal{M}\,Q = 45{,}09 \times H \times \delta',$$

y para la suma algebráica de momentos

$$\Sigma\,\mathcal{M} = (365{,}51 - 1{,}08H + 1{,}52\,H^2 + 0{,}013H^3)\,\delta'.$$

Por último, la distancia de la resultante á la arista de giro

tendrá por expresión

$$d = \frac{365,51 - 1,08\,H + 1,52\,H^2 + 0,013\,H^3}{75,645 + 7,60\,H + 0,1\,H^2}.$$

Si se quisiera tener en cuenta el empuje de las tierras sobre el estribo, habría que añadir al numerador de la expresión de d el término $0,0368\,(H + h)^3$, y al denominador $0,02124\,(H + h)^2$. Véanse los cálculos análogos para las bóvedas de mampostería (**348**).

Se tendría así la nueva expresión

$$d = \frac{365,51 - 1,08H + 1,52H^2 + 0,013H^3 + 0,0368(H + h)^3}{75,04 + 7,60\,H + 0,1\,H^2 + 0,02124\,(H + h)^2}.$$

La letra h designa la altura de la rasante sobre los arranques, altura que en el caso considerado es de 9 metros.

Aplicando las fórmulas del trapecio á las expresiones de d, se obtendrán las máximas presiones en la base de los estribos.

359. Análogas expresiones de la distancia de la resultante á la arista de giro se conseguirán para las diferentes luces consignadas en el siguiente cuadro, que contiene los resultados obtenidos con empuje de tierras y sin él. Advertiremos que para todas estas luces se supone que la rasante del camino se halla por encima de los arranques, á una altura igual á $\frac{1}{10}$ de la luz y un metro más.

NÚME

CUADRO *de máximas presiones en la base de*

Luces. A	Empuje del arco por metro lineal. Q	Altura de arranques. H	Ancho de la base. B	SIN EM
				Pesos sobre la base. ΣP
m.	K.	m.	m.	K.
40,00	40.800	2,00	5,20	80.900
		5,00	5,80	117.500
		10,00	6,80	186.500
		20,00	8,80	358.100
60,00	67.800	2,00	6,60	134.440
		5,00	7,20	179.980
		10,00	8,20	264.680
		20,00	10,20	467.080
80,00	99.200	2,00	8,00	200.728
		5,00	8,60	255.508
		10,00	9,60	355.608
		20,00	11,60	588.308
100,00	135.000	2,00	9,40	279.796
		5,00	10,00	343.816
		10,00	11,00	459.316
		20,00	13,00	723.296

RO 72

los estribos con talud, para puentes metálicos de arco.

PUJE DE TIERRAS		CON EMPUJE DE TIERRAS		
Distancias. d	Presiones máximas. ρ	Pesos sobre la base. ΣP	Distancias. d	Presiones máximas. ρ
m.	K.	K.	m.	K.
2,19 3,01	22.932	83.036	2,47 2,73	18.363
1,83 3,97	42.805	121.873	2,42 3,38	31.476
2,03 4,77	61.248	197.114	3,31 3,49	30.942
3,28 5,52	71.782	387.305	6,30 2,50	105.948
3,13 3,47	23.506	138.223	3,48 3,12	24.294
2,64 4,56	44.994	186.707	3,29 3,91	32.622
2,61 5,59	67.606	278.183	3,91 4,29	38.673
3,60 6,60	86.089	501.142	6,53 3,67	98.263
4,05 3,95	26.094	206.514	4,46 3,54	34.694
3,44 5,16	47.536	264.660	4,16 4,44	33.790
3,21 6,39	74.085	372.460	4,56 5,04	44.617
3,94 7,66	99.488	628.100	6,81 4,79	87.717
4,98 4,42	35.123	287.694	5,43 3,97	45.488
4,32 5,68	48.409	355.762	5,11 4,89	37.924
3,96 7,04	76.831	479.930	5,35 5,65	47.120
4,46 8,54	107.938	763.818	7,38 5,62	82.609

Haremos sobre los resultados de este cuadro las siguientes observaciones.

Salvo el caso de grandes alturas, como la de 20 metros, altura que no suele presentarse en la práctica para los puentes de arco, las presiones máximas en la base de los estribos, ya sea con empuje de tierras, ya sin él, son aceptables; podría, pues, deducirse, que si no conviniera tener presente otra circunstancia de que hablaremos más adelante, no habría necesidad de preocuparse con el empuje de tierras; lo mismo si el puente estuviese dispuesto con muros en ala, como si éstos fuesen de acompañamiento. Pero según veremos, con la primera disposición y aun para alturas de arranques muy inferiores á 20 metros, será forzoso modificar las dimensiones de estribo dadas por la fórmula que antecede.

Los valores obtenidos para las distancias de la resultante á las aristas de la base indican que la curva de presión casi siempre se halla contenida en el núcleo central del estribo, es decir, en el tercio central de su espesor; no se separa de él más que muy poco y en pequeño número de casos. Algunos constructores calculan el espesor de estribos imponiéndose la condición de hacer pasar la resultante por el tercio de la base; pero no puede aplicarse este sistema á grandes alturas, sin obtener, como resultado, presiones que excedan de los límites admitidos en la práctica.

360. Vamos ahora á hacernos cargo de la circunstancia que, según se dijo, obliga á modificar los espesores de estribo procedentes de la fórmula propuesta, cuando la obra presenta gran altura, y el terraplén se halla contenido con muros en ala.

Sucede á menudo que la construcción de los estribos de mampostería con sus muros, así como el terraplén, quedan terminados mucho antes de poderse montar en obra el tramo metálico. Resulta de aquí, que durante este intervalo de tiempo, los estribos hacen oficio de simples muros de sostenimiento; por lo tanto, si el empuje de las tierras actúa sobre toda la longitud de estos macizos, y es precisamente lo que se verifica en el caso de muros en ala, es indispensable que por sí solos

puedan resistir al empuje del terraplén, por no hallarse entonces dicho empuje contrarrestado con el del arco metálico. Pero si se examinan los anchos de base indicados en el cuadro, los cuales permiten hacerse cargo de la latitud media del estribo, se ve que para grandes alturas las dimensiones obtenidas no ofrecen suficientes garantías de estabilidad, sobre todo, con respecto á la resistencia al aplastamiento, pues es evidente que, sin el empuje del arco, se llegará á obtener presiones máximas muy superiores á las que indica la última columna del cuadro, relativa al caso de actuar al mismo tiempo los dos empujes opuestos.

Las máximas presiones en la base empiezan á exceder de los tipos generalmente admitidos, cuando la altura de arranques se halla comprendida entre 7 y 8 metros. Siendo ésta mayor, debe aumentarse forzosamente el espesor de estribo; en este caso se podrá aplicar una nueva fórmula, que daremos al estudiar los estribos para tramos metálicos sin empuje.

Pero este aumento solo es aplicable á los estribos con muros en ala, porque si éstos son de acompañamiento, podrá adoptarse la fórmula propuesta. Dado el ancho generalmente asignado á las vías de comunicación, para grandes alturas los dos muros de un mismo lado se unen en la parte inferior, según se dijo ya, y reducen mucho la superficie de estribo que recibe el empuje de tierras, variable como el cuadrado de altura; constituyen, además, contrafuertes interiores, y aumentan, por lo tanto, la resistencia bajo todos conceptos.

ESTRIBOS PARA VIGAS METALICAS RECTAS

361. Estos macizos no sufren más empuje que el de las tierras, y pueden considerarse como simples muros de sostenimiento. Sin embargo, para fijar sus dimensiones, no pueden aplicarse las reglas establecidas en el capítulo IV, en atención á que deben sostener además el peso del semitramo metálico. Vimos en dicho capítulo que cuando la altura era de alguna importancia, y sucede esto á menudo en semejantes construc-

ciones, la máxima presión en la base excedía fácilmente de los límites admitidos en la práctica. Con mayor razón se verificará esto en virtud de la carga metálica, y dará motivo á la necesidad de aumentar la relación tipo del tercio entre el grueso y la altura del muro, á medida que crece esta altura, y especialmente cuando las tierras actúan sobre toda la longitud del estribo.

Indicamos en el mismo capítulo que era entonces conveniente disponer verticalmente el paramento contiguo al terraplén. Admitiremos, pues, esta disposición, y se podrá fijar la latitud de coronación por medio de la fórmula siguiente, que hemos establecido después de algunos tanteos

$$E_c = H_t \,(0{,}33 + 0{,}007\, H_t),$$

y en la cual H_t designa la altura total del terraplén, ó la altura de la rasante sobre la base del estribo. Con objeto de poder apreciar los resultados obtenidos con esta fórmula, haremos aplicación de ella á dos puentes ó viaductos, cuyas luces serán respectivamente de 20 y de 100 metros. Se calculará siempre el peso del metro lineal de tramo por medio de la expresión

$$p = 33\,A + 800.$$

Este peso, aumentado con la sobrecarga de 4.000 kil. por metro y extendido al semitramo, obrará sobre el estribo, cuya longitud se supone ser de 6 metros, á una distancia de la arista exterior de la coronación fijada á $0^m{,}65$. Se admite, además, que á partir de esta misma arista, el paramento visto ofrece un talud de $\frac{1}{20}$.

En el siguiente cuadro se indican los resultados del cálculo.

NÚMERO 73

CUADRO *de máximas presiones en la base de los estribos con muros en ala, para tramos metálicos sin empuje.*

Luces. A	Altura total. H_t	Ancho de coronación. E	Ancho de la base. B	Pesos sobre la base. ΣP	Distancias. d	Máximas presiones. ρ
m.	m.	m.	m.	K.	m.	K.
20,00	5,00	1,84	2,09	30.716	0,81 1,28	24.631
	10,00	4,00	4,50	102.601	1,70 2,80	39.535
	20,00	9,40	10,40	444.701	4,34 6,06	63.968
100,00	5,00	1,84	2,09	89.100	0,87 1,22	33.652
	10,00	4,00	4,50	160.996	1,50 3,00	71.554
	20,00	9,40	10,40	503.096	4,01 6,39	81.075

362. No hemos extendido el cálculo á alturas totales que excedan de 20 metros, por considerar que no conviene admitir en la práctica muros en ala de tanta elevación. La fórmula es independiente de A, por lo tanto, á igualdad de altura las dimensiones del estribo no varían, sea cual fuere la luz del tramo. Sin embargo, la presión en la base crece con esta luz, y en efecto, con ella aumenta el peso de la estructura metálica y su sobrecarga total, y es con objeto de apreciar esta variación por lo que hemos considerado una luz de 20 metros y otra mucho mayor de 100.

Si haciendo abstracción del talud de $\frac{1}{20}$ dado al paramento visto, se compara el ancho de coronación del último cuadro,

ancho equivalente entonces al ancho medio, con la latitud media que se deduce del penúltimo cuadro, quitando del ancho de base el décimo de la altura total, se ve que los volúmenes del macizo obtenidos con la primera fórmula, son superiores á los hallados por medio de la segunda, siempre que la altura de arranques sea inferior á $7^{m},50$; lo contrario sucede cuando la altura es más considerable. En este último caso, y si además la obra comprende muros en ala, se fijarán las dimensiones del estribo valiéndose de la segunda fórmula, la cual podrá entonces aplicarse lo mismo á un tramo de arco que á una viga sin empuje.

Hallándose sostenido el terraplén con muro de acompañamiento, podrán reducirse las dimensiones dadas por esta segunda fórmula para grandes alturas, fijándolas según resulta con el empleo de la primera, cualquiera que fuese la clase del tramo.

Advertiremos, además, que los anchos de coronación obtenidos con la segunda fórmula podrán ser insuficientes en algunos casos en que, á consecuencia de la disposición del terreno, el estribo presente poca altura. Citaremos un ejemplo: si los cabeceros inferiores de la viga metálica han de estar colocados por debajo de la coronación, será necesario estrechar la parte superior de la sección obtenida para el estribo con objeto de formar el plano horizontal de apoyo; podrá suceder entonces que el espesor del macizo reducido no sea suficiente para resistir convenientemente al empuje de las tierras.

Supongamos que la altura total es de 5 metros, y que el plano de apoyo deba estar colocado á 4 metros por bajo de la coronación; admitiendo aún que se ha trazado el paramento visto con talud de $\frac{1}{20}$, resultará para el ancho total al nivel del apoyo $2^{m},04$; las condiciones de la obra podrán exigir como amplitud de este apoyo $1^{m},20$ ó más, y entonces solo quedará $0^{m},84$ de grueso para el murete superior, cuya altura es de 4 metros, lo que no ofrece suficientes garantías de resistencia al empuje del terraplén.

En vista de lo que antecede, creemos que debe entonces

determinarse el ancho del estribo empleando la primera fórmula. En una palabra, la segunda no tendrá aplicación más que en el caso de existir muros en ala con alturas superiores á $7^m,50$, ya sea para tramos metálicos de arco, ya para tramos sin empuje. Entiéndase que tratándose de un estribo que sostiene un tramo sin empuje, debe aplicarse la designación de arranques al nivel situado por debajo de la coronación á una distancia igual al décimo de la luz y un metro más.

Resumimos á continuación las reglas anteriores.

REGLAS PRÁCTICAS PARA DETERMINAR LA SECCIÓN DE LOS ESTRIBOS CON DESTINO Á UN PUENTE DE TRAMO METÁLICO.

363. Debe empezarse por calcular la latitud de arranques ó de coronación, empleando una de las dos fórmulas anteriores, que reproducimos en la forma siguiente:

1.ª Fórmula que da la latitud de arranques.

$$E_a = 2^m,00 + 0,07\,A \ldots\ldots$$

Se aplica con toda forma de tramo: 1.° A cualquier altura, cuando el terraplén está contenido por muros de acompañamiento. 2.° Y á una altura de arranques inferior á $7^m,50$, cuando los muros son en ala.

2.ª Fórmula que da la latitud de coronación.

$$E_c = H_t \left(\frac{1}{3} + 0,007\,H_t\right) .$$

Se aplica con toda forma de tramo á una altura de arranques superior á $7^m,50$, cuando el terraplén está contenido por muros en ala.

Hallado el resultado del cálculo, se hará el trazado de la sección de estribo, según vamos á indicar.

Supongamos que ha debido aplicarse la primera de las dos fórmulas, cuyo resultado es el ancho de arranques.

Sea ST (fig. 183), la altura total; sobre ella se fijará el nivel de arranques, llevando SB igual al décimo de la luz aumentado de un metro. Por el punto B, que determina este nivel, se traza la horizontal BA con la magnitud de ancho obtenida por la fórmula, y por A se hará pasar la línea CAD con inclinación de $\frac{1}{5}$. Si el tramo es de arco, esta línea (figura 183 a), representará el paramento interior del estribo, paramento que si se quiere podrá disponerse por retallos. Se trazarán luego el plano inclinado FG que recibe la caída del arco, y el paramento vertical EF, conforme á las condiciones del proyecto. El paramento visto GL, por bajo de arranques, se trazará verticalmente ó con un ligero talud.

Si el estribo ha de sostener una viga metálica sin empuje (fig. 183 *b*), después de haber trazado la linea inclinada CAD, se hace pasar por su punto medio O la vertical MN, que fija la posición del paramento interior del estribo. Por el punto S se traza SL con una ligera inclinación, y ya no quedará más que formar el retallo EFG que ha de recibir la extremidad de la viga. La altura y la latitud de este retallo dependerán también de las condiciones de la estructura metálica y de la situación de la vía con respecto á los apoyos de dicha estructura.

Supongamos ahora que ha sido necesario aplicar la segunda fórmula que da el ancho de coronación.

Se lleva horizontalmente este ancho de S á M, luego por este último punto se hace pasar la vertical MN.

Si el tramo es sin empuje, esta vertical determina el paramento interior del estribo (fig. 183 *b*). Pero tratándose de un puente de arco, por el punto O medio de MN se traza la recta DOC inclinada á $\frac{1}{5}$ (fig. 183 *a*). En ambos casos las demás operaciones se verifican según se ha dicho antes, lo mismo en lo que se refiere á la fijación del nivel de arranques, como al trazado del perfil exterior EFGL.

364. Las reglas y fórmulas que anteceden no deben considerarse más que como meras indicaciones para obtener rápida-

mente una primera sección de estribo. Según las circunstancias especiales de cada obra esta sección podrá recibir algunas modificaciones, ya sea en los anchos, ya en los taludes. El examen de la presión máxima en la base, indicada en los dos cuadros que hemos calculado, podrá servir de guía para apreciar las alteraciones que convenga introducir en aquellos elementos.

Se ha establecido la primera fórmula que da el espesor de arranques, partiendo de un empuje de arco hipotético que podrá diferir del verdadero, por más que creemos que el primero se halla en condiciones medias bastante aceptables; pero si se conociese exactamente este empuje y se quisieran afinar más los resultados, podría modificarse el cálculo procediendo como sigue.

El empuje del arco sobre la totalidad del estribo que hemos adoptado (**358**), se deduce de la ecuación

$$Q = (4.800 + 33\ A) \times A.$$

Si en esta ecuación reemplazamos Q por el empuje verdadero que suponemos conocido, podrá deducirse un valor de A , que diferirá más ó menos de la luz que realmente tiene el proyecto. Poniendo este valor en la fórmula que determina la latitud de arranques se obtendrá para esta dimensión un resultado más exacto.

Debemos advertir, sin embargo, que el conocimiento del verdadero empuje del arco procederá sin duda de un estudio completo de la estructura metálica; lógico será entonces extender el estudio á la parte de mampostería, es decir, que convendrá determinar la latitud de estribos imponiéndose la condición de ser la máxima presión unitaria en la base igual á una cantidad asignada de antemano. Sabemos cómo se resuelve el problema: en cada caso particular tendremos fijados los taludes de los paramentos y la forma y dimensiones del retallo superior, así como la altura total; la sección del estribo no contendrá ya más incógnita que la latitud y será fácil calcular, en función de esta incógnita, los pesos y los momentos que entran

en la expresión de la distancia d. Poniendo esta expresión en las fórmulas del trapecio, se obtendrá la ecuación final que ha de dar la solución.

PILAS DE MAMPOSTERIA PARA GRANDES VIADUCTOS METALICOS

365. Vimos en el capítulo anterior, que cuando una pila sostiene dos bóvedas simétricas, la presión máxima en la base era igual á la presión media que se obtenía dividiendo la carga total por el área de dicha base; la curva de presión se confunde entonces con el eje vertical de la pila. Pero si se trata de una pila de gran altura sobre la que insiste una viga metálica, no sucede lo mismo, pues hay que atender á la presión del viento, que puede actuar, no solo sobre la pila, sino también sobre la viga y su sobrecarga.

Esta presión puede llegar á ser muy importante. Aunque los dos tramos contiguos al apoyo sean simétricos, y admitiendo que la dirección del viento sea normal á los planos de frente, la curva de presión, aunque esté contenida en el plano vertical perpendicular á estos frentes que divide la pila en dos partes iguales, se separará del eje de la sección producida por este plano, tanto más cuanto mayor sea la altura de la pila. De aquí resulta que la presión unitaria máxima se verificará en la arista de la base, opuesta al empuje del viento, y será bastante mayor que la presión media.

Daremos un ejemplo considerando un viaducto para ferrocarril de una vía, con tramos metálicos de 50 metros de luz.

Admítase para la pila de fábrica un ancho en la coronación de $2^m,50$ en sentido de la vía y $6^m,00$ en sentido perpendicular; dispónganse además los cuatro paramentos del macizo con talud de $0^m,03$ por metro. Esta pila se compone de un prisma rectangular central, de cuatro prismas triangulares y de cuatro pirámides rectangulares; partiendo de las dimensiones y taludes que acabamos de fijar, y designando además por H la

altura de la pila, tendremos para su peso

$$P = (15\,H + 0{,}255\,H^2 + 0{,}0012\,H^3)\,\delta'.$$

Hay que añadir á este peso el del tramo y el de la sobrecarga de prueba. El primero se calcula por la fórmula ya empleada (**357**), y da por resultado

$$(33 \times 50 + 800) \times 50 = 122.500^{k.} = 55{,}68 \times \delta'.$$

La sobrecarga está representada por un peso de 4.000 kilogramos por metro lineal; su peso será

$$4.000 \times 50 = 200.000^{k.} = 90{,}909 \times \delta'.$$

Todos los pesos obran con un brazo de palanca igual á la semilongitud de base, ó sea igual á $3^m{,}00 + 0{,}03\,H$, y fácilmente se hallará el momento de la suma de estos pesos.

El viento actúa: 1.° Sobre la cara anterior de la pila, cuya área es $(2{,}50 + 0{,}03H)\,H$. 2.° Sobre el tramo metálico, y admitiremos que presenta á la acción del viento una superficie de cuatro metros cuadrados por metro lineal. 3.° Por último, sobre la sobrecarga formada por los vehículos de transporte, á los que asignamos una superficie de 2,50 por metro lineal y que supondremos ocupan toda la longitud del tramo. La máxima presión del viento que puede admitirse para un tren en movimiento, es de 150 kilogramos por metro cuadrado; con objeto de simplificar, tomaremos el punto de aplicación del empuje sobre la pila en la mitad de su altura; para el brazo de palanca de la presión sobre el tramo, $H + 3^m{,}00$; y sobre los vehículos, $H + 6^m{,}75$. Podremos formar los momentos de estos empujes, que obran en sentido contrario de los relativos á los pesos, y por último, obtendremos la distancia de la resultante á la arista de giro, por medio de la expresión

$$d = \frac{341{,}332 + 27{,}2387H + 1{,}13H^2 + 0{,}01023H^3 + 0{,}000036H^4}{146{,}59 + 15\,H + 0{,}255\,H^2 + 0{,}0012\,H^3}.$$

366. Los resultados de la aplicación de esta expresión á la

fórmula del trapecio, se indican en el siguiente cuadro, que contiene también los coeficientes de estabilidad de giro.

NÚMERO 74

CUADRO *de máximas presiones en la base de una pila que sostiene tramos metálicos de* 50 *metros de luz, sometidos á la acción del viento.*

Altura de la pila. H	Longitud de la base. b	Ancho de la base. b'	Pesos sobre la base. P	Distancias. d	Presiones máximas. ρ	Coeficiente de estabilidad. c
m.	m.	m.	K.	m.	K.	m.
10,00	6,60	3,10	711.238	2,28 4,32	66.961	3,24
20,00	7,20	3,70	1.228.018	2,55 4,65	86.478	3,44
30,00	7,80	4,30	1.888.676	2,89 4,91	100.120	3,87

La comparación de los valores de d con las longitudes de base hace ver que la curva de presión se halla comprendida en el núcleo central, es decir, en el tercio del medio, de donde se deduce que el cálculo de ρ exige el empleo de la primera fórmula del trapecio. Es de advertir que en el caso considerado, la suma de pesos no se refiere al metro lineal de pila, sino á todo el macizo; por lo tanto, si ponemos esta suma en la mencionada fórmula, deberá dividirse el resultado que se obtenga por la latitud de la base, á fin de que la presión corresponda á la unidad superficial. Equivale esto evidentemente á calcular la presión por medio de la fórmula

$$\rho = \frac{2P}{\Omega}\left(2 - \frac{3d}{b}\right),$$

que hallamos en el capítulo I (**10**), y en la que Ω representa la superficie de la base ó el producto $b \times b'$.

Los valores de ρ resultan algo crecidos para grandes alturas, lo cual demuestra que en semejante caso hubiera sido conveniente aumentar los taludes de la pila, sobre todo en las dos caras que forman los planos de frente. Los coeficientes de estabilidad de giro son muy suficientes. Por último, no hay que temer el deslizamiento, pues al nivel de la coronación la carga es igual á seis veces y media el empuje; en la base de la pila y con una altura de 30 metros, esta relación es próximamente de 30 veces.

Para poder apreciar la influencia ejercida por la inclinación de los paramentos sobre la resistencia del macizo de fábrica, diremos que, haciendo esta inclinación de $0,^{m}05$ por metro en las cuatro caras de la pila, en vez de $0^{m},03$ que indicamos antes, y en la hipótesis de una altura de 30 metros, se halla para la presión máxima en la base la cantidad de 7,34 kilogramos por centímetro cuadrado; el coeficiente de estabilidad es entonces 5,46.

367. Suele calcularse también la acción del viento sobre un viaducto, admitiendo que el tramo está descargado; pero entonces se adopta un empuje máximo de 270 kilogramos por metro cuadrado de superficie. Es fácil conocer las modificaciones que deberán introducirse en el cálculo; disminuye la suma de los pesos del que representa la sobrecarga móvil que se tomó igual á 4.000 kilogramos por metro lineal de vía; el empuje del viento ya no actúa más que sobre la pila y sobre la estructura metálica. En semejantes condiciones se obtiene para la distancia de la resultante á la arista de giro

$$d = \frac{93,405 + 22,125\,H + 1,062\,H^2 + 0,0094\,H^3 + 0,0036\,H^4}{55,68 + 15\,H + 0,255\,H^2 + 0,0012\,H^3}.$$

Se ha determinado esta expresión en el supuesto de tener los cuatro paramentos un talud de 0,03 por metro. Aplicándola á distintas alturas de pila se hallan, para la presión máxima en la base, resultados que difieren poco de los señalados en el cuadro que antecede. Nos limitaremos á indicar que á una altu-

ra de 30 metros corresponde una presión máxima de 10,07 kilogramos por centímetro cuadrado, cantidad casi igual á la que se obtuvo con la sobrecarga.

368. Sucede á veces que es preciso disponer el viaducto para colocar en él la vía en curva. Parece entonces lógico atender, á más del empuje del viento, á la acción de la fuerza centrífuga, que contribuye también al giro de la pila y al aumento de presión en la base.

El valor de la fuerza centrífuga está dado por la expresión

$$F = \frac{Pv^2}{gR},$$

en la que las letras tienen las siguientes significaciones:

P, peso de la carga en movimiento;
v, velocidad por segundo de esta carga;
g, aceleración de velocidad debida á la gravedad, ó sea 9,81.
R, radio de la curva que recorre la carga.

Tomaremos el mismo ejemplo de una pila de $2^m,50$ por $6^m,00$ en la coronación, con taludes de $0^m,03$ por metro de altura, y que sostenga tramos de 50 metros de luz. Los pesos de la pila, del tramo y de la sobrecarga, tendrán los mismos valores que antes. Admitiremos para el tren en movimiento una velocidad de 40 kilogramos por hora, ó sea 11 metros por segundo, y para la curva un radio de 400 metros. Se halla con estas condiciones

$$F = \frac{200.000 \times \overline{11}^2}{9,81 \times 400} = 6.171 \text{ kilog.}$$

Dividiendo este resultado por 2.200 (densidad de la mampostería), podrá representarse la intensidad de la fuerza centrífuga por

$$F = 2,805 \times \delta'.$$

Esta fuerza actúa al nivel de los carriles; tomaremos por

brazo de palanca la cantidad $H + 5^m,50$, y resultará para el momento, con respecto á la base de la pila

$$\mathcal{M} F = 2,805\, \delta' \times (H + 5^m,50) = (15,4275 + 2,805\, H)\, \delta'.$$

Si este momento tiene igual signo que los demás empujes, es decir, si el viento actúa en el mismo sentido que la fuerza centrífuga, deberá entonces restarse del numerador de la expresión de d, lo que dará lugar á menor distancia entre la resultante y la arista de giro, y como consecuencia, producirá mayor presión máxima en la base de la pila. Haciendo esta modificación se obtienen los siguientes resultados para una altura de 30 metros.

Distancia de la resultante á la arista de giro. . $d = 2^m,77$
Presión máxima en la base.. . . . . $\rho = 105.294^k$.
Coeficiente de estabilidad de giro.. . . . . $c = 3,47$

Puede el viento actuar en sentido contrario de la fuerza centrífuga, y entonces el momento de esta fuerza debe añadirse al numerador de la expresión de d. Resulta en este caso:

Distancia de la resultante á la arista de giro. . $d = 3^m,00$
Presión máxima en la base.. . . . . $\rho = 95.276^k$.
Coeficiente de estabilidad. . . . . $c = 4,38$

Se ve por los resultados anteriores, que la acción de la fuerza centrífuga no ejerce gran influencia sobre la resistencia de la obra; por lo tanto, juzgamos inútil examinar el caso en que esta fuerza actúa sola sin el viento, pues la mayor presión en la base distaría poco de la presión media, que para la misma altura de 30 metros tiene por valor 56.311 kilog. por metro cuadrado. Resulta de esto, que si el viaducto debiera situarse en un valle abrigado, no sería preciso preocuparse con los empujes procedentes del viento y de la fuerza centrífuga.

ESTABILIDAD DE LAS TORRES

369. El establecimiento de los faros destinados al alumbrado marítimo, motiva con frecuencia la construcción de torres de

mucha altura, cuya estabilidad conviene estudiar. Lo mismo sucede con las grandes chimeneas de los establecimientos fabriles.

Puede verse con este motivo una memoria publicada por M. Fresnel en los *Annales des Ponts et Chaussées*, año 1831, en la que este ingeniero se propone demostrar la buena estabilidad del faro de *Belle-Ile*, comparándola con la de otras construcciones análogas, cuya resistencia se halla sancionada por el tiempo. A nuestro parecer, los cálculos de M. Fresnel pecan por deficientes, pues solo considera la resistencia de la construcción con respecto al movimiento de giro que puede imprimirle el empuje de los grandes vendavales. Pero tratándose de obras de mucha altura, y es precisamente el caso actual, la base del macizo se halla sometida á fuertes presiones, procedentes principalmente de los pesos que sobre ella actúan y también de fuerzas exteriores; entonces, según ya se vió, es necesario atender con preferencia á la posibilidad del aplastamiento de los materiales.

Por más que el autor de la citada memoria adopta para el empuje del viento la cantidad de 275 kilogramos por metro cuadrado de superficie, presión que es de las más fuertes que suelen admitirse, pues corresponde á los grandes huracanes, los cálculos dan por resultado coeficientes de estabilidad que en algunos casos exceden de 8. Pero desde el momento en que se parte de un empuje susceptible de considerarse como un límite superior, si al mismo tiempo no debiera atenderse más que al movimiento de giro, los coeficientes obtenidos para las diversas obras que se comparan serían excesivos, y su magnitud disminuiría considerablemente el interés de la comparación.

Admite, sin embargo, el autor la posibilidad del aplastamiento, pero no, nos parece lógica la manera de tenerla en cuenta. Supone que si la torre llegase á ceder al esfuerzo del viento, debería verificarse cierta destrucción de la arista de giro, y como consecuencia se disminuiría el brazo de palanca de la resistencia; por lo tanto, en vez de ser este brazo igual al radio de la base, quedaría reducido en una cantidad que fija

arbitrariamente en cada caso. No es muy rigoroso este método, pues al admitir la posibilidad del aplastamiento, por pequeño que sea, se supone implícitamente que la obra se halla en malas condiciones de resistencia; y además, aunque sea hipotético el movimiento, nada indica hasta donde es preciso estender la reducción del brazo de palanca.

Para conocer la resistencia de una torre muy elevada, debe seguirse el procedimiento derivado de la aplicación de las fórmulas establecidas en el primer capítulo, las cuales dan la presión máxima que tiene lugar en la base de un macizo sometido á diversas fuerzas.

370. Aplicaremos este procedimiento á algunas de las construcciones examinadas por M. Fresnel, y son: el faro de *Belle-Ile*, la torre de señales de *Lorient*, la columna de *Boulogne-sur-Mer* y la chimenea de la fundición de *Alais*. Pero antes debemos entrar en algunas consideraciones relativas á la intensidad del empuje del viento, cuando obra sobre una superficie cilíndrica, comparando dicha intensidad con la que corresponde al caso de ser la superficie plana.

Establece M Fresnel que la presión del viento sobre un cilindro es las dos terceras partes de la que tendría lugar sobre la sección meridiana del mismo, y lo demuestra con el siguiente razonamiento.

Sea AMB (fig. 184), la sección recta de un cilindro; consideremos una altura de generatriz igual á la unidad, y designemos por

f, la intensidad del empuje del viento por unidad superficial, que obra sobre un elemento del cilindro situado en M, y cuya proyección sobre el diámetro AB, llamaremos dx;

r, el radio del cilindro;

α, el ángulo FMN que la dirección del viento, perpendicular á AB, forma con la normal NM.

La fuerza $f \times dx$ se descompone en otras dos, según la tangente MT y según dicha normal; la primera resbala sobre la superficie, sin producir ningún efecto; la segunda se combina con su simétrica, que actúa en M′ y tiende á derribar el cilin-

dro; la intensidad del esfuerzo de cada una de estas dos últimas fuerzas en sentido del movimiento será $f \cos.^2 \alpha dx$; pero tenemos

$$f \cos.^2 \alpha dx = \frac{f(r^2 - x^2)\, dx}{r^2}.$$

Integrando esta última expresión entre los límites $x = r$ y $x = -r$, resulta para la presión del viento sobre el semicilindro

$$F = \frac{4}{3} rf = \frac{2}{3} \times 2rf,$$

lo que indica el resultado establecido por M. Fresnel.

371. *Faro de Belle-Ile.*—La torre de este faro constituye una columna hueca de 52,50 metros de altura, con un diámetro exterior de $7^m,30$ en la base y $5^m,50$ en la coronación. El vacio interior es cilíndrico, de $4^m,20$ de diámetro y contiene la escalera. La torre en su parte baja y hasta una altura de $9^m,50$, se halla rodeada por un basamento circular con dos pisos, de 14 metros de diámetro, y unido á dicha torre por medio de seis muros radiales.

Entre el piso bajo y la cámara superior de la torre debía disponerse una escalera helizoidal compuesta de 266 peldaños, presentando un alma hueca de $2^m,20$ de diámetro. Pero se modificó esta disposición del proyecto primitivo, estableciendo un muro circular igualmente hueco de $0^m,60$ de grueso (fig. 185), el cual, según opinión de M. Fresnel, tenía más bien por objeto sostener los peldaños y facilitar la construcción de la escalera, que fortalecer el conjunto de la torre. Examinaremos más adelante la influencia ejercida por este muro sobre la resistencia de la obra, pero por de pronto haremos caso omiso de él.

Se ha ejecutado todo el macizo con sillería de granito, exceptuando la cimentación y algunas bóvedas, en las que se ha empleado ladrillo.

El punto de más fácil rotura está situado al nivel de la azotea que presenta el basamento, lo cual reduce la altura de torre, que debe considerarse para el cálculo, á $52^m,50 - 9^m,50 = 43$ metros, y el diámetro exterior en el mismo nivel á $6^m,974$. Tomaremos los pesos indicados por el autor, así como los datos que adopta, y son

2.700 kilog. para el peso del metro cúbico de sillería;

275 kilog. para el empuje del viento por metro cuadrado de superficie plana, empuje que hay que reducir á los $\frac{2}{3}$ con motivo de la curvatura de la torre;

pero no reduciremos el brazo de palanca, que hacemos igual al radio exterior de la base, lo cual dará evidentemente lugar á coeficientes de estabilidad mayores que los obtenidos por M. Fresnel.

Tendremos, pues:

Peso de la torre por encima del basamento.	$752^{m^3} \times 2.700^{k.} =$	$2.030.400^{k.}$
Momento de este peso..	$2.030.400^{k.} \times 3^m,487 =$	7.080.005
Momento del empuje del viento.	$\frac{2}{3} \times 275^{k.} \times 6.755^{m^2} =$	1.238.417
Suma algebráica de los momentos.		5.841.588

La distancia de la resultante al punto de giro es, por lo tanto,

$$d = \frac{5.841.588}{2.030.400} = 2^m,877.$$

Para obtener la presión unitaria en la base es preciso aplicar la fórmula general [1] hallada en el primer capítulo (**9**)

$$\rho = P\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{x_1 x}{I_y}\right),$$

en cuya fórmula se designa por

P, la suma de las fuerzas verticales;

Ω, el área de la base;

x_1, la distancia de la resultante al centro de gravedad de la base;

x, la distancia á este mismo centro del punto en el que se busca la presión;

I_y, el momento de inercia de la base con respecto al centro de gravedad.

Designando por r y r' los radios exterior é interior de la sección anular de la base se tiene, según vimos en el capítulo I (**18**),

$$\Omega = \pi \; (r^2 - r'^2),$$

$$I_y = \pi \frac{(r^4 - r'^4)}{4},$$

y también

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4x_1x}{r^2 + r'^2}\right).$$

Se obtiene la distancia x_1 de la resultante al centro, restando del radio exterior el valor de d, lo que da

$$x_1 = r - d = 3^{m},487 - 2^{m},877 = 0^{m},61.$$

Los puntos de la base para los que conviene determinar la presión unitaria, son los extremos del diámetro que se halla en la dirección del viento; en estos puntos se verifican las presiones máxima y mínima. Haciendo, pues, $x = \pm r$, resulta

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 \pm \frac{4rx_1}{r^2+r'^2}\right) = \frac{2.030.400}{27,70}\left(1 \pm \frac{4\times 3,49\times 0,61}{16,52}\right),$$

y se obtiene para el máximo correspondiente

al signo + ... $\rho = 124.100^{k.}$

y para el mínimo relativo al signo — . . . . . $\rho = 40\,300^{k.}$

Este último valor es también positivo y denota compresión.

La presión unitaria máxima que hemos hallado, y corresponde á 12,41 kilog. por centímetro cuadrado, demuestra que la obra

se encuentra en muy buenas condiciones de resistencia al aplastamiento, puesto que la sillería de granito empleada resiste sin romperse á 600 ó 700 kilog. por la misma unidad superficial.

Se obtiene el coeficiente de estabilidad de giro, dividiendo el momento de los pesos por el momento del empuje, y se halla

$$c = \frac{7.080.005}{1.238.417} = 5,71.$$

M. Fresnel obtiene solo 4,9, por causa de la reducción que introduce en el brazo de palanca de la resistencia.

372. Si se quiere examinar la influencia ejercida sobre la resistencia de la torre por el muro anular interior, lo supondremos unido á dicha torre por medio de la escalera, como en realidad sucede; habrá que añadir su peso al denominador de la expresión de d, y el momento de este peso al numerador.

El peso de este muro interior es. . . . . . . 459.524 kil.
y su momento tiene por valor $459.524^{k.} \times 3^{m},487 = 1.602.360$.
El nuevo valor de d será, pues,

$$d = \frac{5.811.588 + 1.602.360}{2.030.400 + 459.524} = \frac{7.442.948}{2.489.924} = 2^{m},99,$$

y la distancia de la resultante al centro de la base

$$x_1 = 3^{m},487 - 2^{m},99 = 0^{m},497.$$

El valor de ρ se hallará aplicando la misma fórmula general, solo que ahora la base se compone de un doble anillo, y designando por r_1 y r'_1 los radios del muro interior, resulta,

$$\Omega = \pi(r^2 + r_1^2 - r'^2 - r_1'^2) = 28^{m^2},66,$$

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 + r_1^4 - r'^4 - r_1'^4) = 103,67.$$

Por último, sustituyendo estos valores se halla

$$\rho = 2.489.924\left(\frac{1}{28,66} + \frac{0,497 \times 3,487}{103,67}\right) = 127.000 \text{ kil.},$$

y para la estabilidad de giro

$$c = \frac{7.080.005 + 1.602.360}{1.238.417} = \frac{8.682.365}{1.238.417} = 7,01.$$

Resulta que han aumentado la estabilidad y la máxima presión, si bien esta última en muy corta cantidad; pero como en semejante obra debe atenderse con preferencia á la resistencia al aplastamiento, puede decirse que el muro interior de la escalera no ha mejorado la mencionada resistencia, y su volumen hubiera tenido empleo más útil aplicándolo al macizo exterior de la torre, para aumentar su espesor ó su diámetro.

373. *Torre de señales de Lorient.*—Este edificio ofrece exteriormente la forma de un cono truncado de $37^m,36$ de altura, cuyos diámetros tienen $7^m,146$ en la parte baja y $4^m,222$ en la coronación. La escalera es de alma llena y ocupa una caja cilíndrica de $2^m,436$ de diámetro. El grueso del alma es de $0^m,325$.

Se ha construído el cuerpo de la torre de mampostería ordinaria, con cadenas, cordones, zócalos y coronación de sillería granítica. Con razón critica M. Fresnel este sistema de fábrica mixta, aplicado á un edificio de tanta altura, que puede acarrear gravísimos inconvenientes, á pesar del grueso de los muros y de la fuerte inclinación del paramento exterior; pero felizmente se ha conseguido evitarlos mediante el gran esmero empleado en la ejecución de la obra, pues no se ha notado grieta alguna en la sillería ni en los enlucidos del paramento de mampostería ordinaria, á pesar de las oscilaciones que ha debido experimentar la torre con los grandes temporales.

A continuación indicamos los cálculos de resistencia según los datos del autor, pero sin reducir el brazo de palanca de los pesos.

Peso de la torre, sillería.. . . .	$128^{m^3} \times 2.700^{k.} =$	$345.600^{k.}$
» » mamp. ordinaria.	$686^{m^3} \times 2.000^{k.} =$	$1.372.000^{k.}$
» » total.		$1.717.600^{k.}$
Momento de este peso. . .	$1.717.600^{k.} \times 3^{m},573 =$	$6.136.985$
Momento del emp. del viento.	$\frac{2}{3} \times 275^{k.} \times 3.920^{m^2} =$	718.758
Suma algebráica de momentos.		$5.418.227$

Distancia de la resultante al punto de giro. . . . . $d = \frac{5.418.227}{1.717.600} = 3^{m},15.$

Distancia de la resultante al centro.. . . . . $x_1 = 3^{m},573 - 3^{m},15 = 0^{m},423.$

Tendremos para la presión máxima en la base

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4rx_1}{r^2 + r'^2}\right)$$

$$= \frac{1.717.600}{35,51}\left(1 + \frac{4 \times 3,573 \times 0,423}{14,32}\right) = 68.684^{k.},$$

y para el coeficiente de estabilidad

$$c = \frac{6.136.985}{718.758} = 8,53.$$

Este coeficiente es mayor que el correspondiente á la torre de *Belle-Ile*; además, la máxima presión en la base ha disminuído notablemente; pero á pesar de estos resultados, puede decirse que, atendiendo á la naturaleza de los materiales empleados en la torre de *Lorient*, se halla este edificio en condiciones de resistencia menos favorables que el faro antes citado, construído en su totalidad de sillería, y con tanto mayor motivo, cuanto que la densidad adoptada para la mampostería ordinaria de la obra que estamos examinando, pecará probablemente por escasa.

374. *Columna de Boulogne-sur-Mer.*—Entre las varias torres de gran elevación existentes en Francia, y que se hallen expuestas á fuertes vendavales, es la más atrevida la columna triunfal de *Boulogne-sur-Mer*. Encuéntrase situada en una meseta que domina el nivel de las mareas más altas y tiene una altura de 51 metros.

Se compone este edificio de un pedestal con zócalo, de un fuste con base y capitel, y, por último, de una linterna. El punto de más fácil rotura se halla en el arranque del fuste, por lo tanto, sólo hay que atender, para el cálculo, á una altura de $41^m,30$.

El fuste de la columna tiene exteriormente un diámetro de $4^m,04$. En el interior existe una escalera de caracol con alma llena de $0^m,85$, y situada en un hueco cilíndrico de $2^m,18$.

Toda la fábrica se ha ejecutado con mármol de *Lunel* muy escogido. El fuste se compone de tambores ó hiladas de $0^m,866$ de altura, comprendiendo cada una alternativamente cuatro y ocho piezas, unidas con garfios de hierro, de una longitud de $0^m,60$ y $0^m,027$ de grueso. Corresponden á cada tambor cinco peldaños, labrados cada uno con el nervio central en un solo bloque empotrado de $0^m,03$ en la caja de escalera.

Se tiene, según el autor:

Peso de la torre. . . . . $315^{m^3},2 \times 2.700^{k.} = 851.040^{k.}$

Momento de este peso. . . $851.040^{k.} \times 2^m,115 = 1.799.949$

Momento del empuje del viento. . . . . $\frac{2}{3} \times 275^{k.} \times 2.294^{m^2},4 = 420.640$

Suma algebráica de momentos. 1.379.309

Se obtiene además:

Distancia de la resultante al punto de giro. . . . . . $d = \frac{1.379.309}{851.040} = 1^m,62.$

Distancia de la resultante al centro. . . . . $x_1 = 2^m,115 - 1^m,62 = 0^m,495.$

Resulta, por último, para la presión máxima en la base, por metro cuadrado,

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4rx_1}{r^2 + r'^2}\right)$$

$$= \frac{851.040}{8,07}\left(1 + \frac{4 \times 2^m,115 \times 0^m,495}{6^{m^2},3776}\right) = 174.040^{k.},$$

y para el coeficiente de estabilidad

$$c = \frac{1.799.949}{420.640} = 4,28.$$

La estabilidad es menor que en las anteriores construcciones análogas, y la presión más crecida; sin embargo, atendiendo á la elección de los materiales y al esmero de la fábrica, pueden considerarse como suficientes las condiciones de resistencia que ofrece la columna de *Boulogne-sur-Mer*, lo que además se halla demostrado por la experiencia.

M. Fresnel considera como inútiles las grapas de hierro empleadas para unir las piezas de una misma hilada; manifiesta, además, que tratándose de aumentar de una manera importante, y mediante el empleo del hierro, la resistencia del edificio contra la acción del viento, hubiera sido necesario establecer trabazón entre las hiladas, con áncoras que atravesaran varios tambores.

Ambos medios constituyen un lujo supérfluo de precauciones.

375. *Chimenea de la herrería de Alais.*—Esta obra, cuya altura es de 55 metros, se ha construído con ladrillo, exceptuando un zócalo de sillería de 3 metros. El punto de más fácil rotura se halla en la parte superior de este zócalo, en donde la chimenea presenta una sección anular, cuyo diámetro exterior tiene $6^m,18$ y el grueso $1^m,39$. En la extremidad superior se reducen estas dimensiones á $2^m,35$ y 0,245 respectivamente. El paramento interior ofrece cuatro retallos: uno de 0,33 á la altura de $14^m,90$, y otros tres de 0,125, distantes entre sí 10 me-

tros. El hueco interior, comprendido entre el suelo y el primer retallo, es cilíndrico, de manera que el grueso del muro en este intervalo es variable; en el resto de la altura los paramentos interiores son paralelos á los exteriores.

No debe considerarse más que una altura de 52 metros. Admite el autor que la fábrica de ladrillo pesa 1.500 kilogramos por metro cúbico, y que la presión del viento pueda alcanzar 275 kilog. por metro cuadrado. Con estos datos se obtiene:

Peso de la chimenea. . . . . $397^{m^3} \times 1.500^{k.} =$ $595.500^{k.}$

Momento de este peso. . . . . $595.500^{k.} \times 3^{m},09 = 1.840.095$

Momento del empuje del viento.. $\frac{2}{3} \times 275^{k.} \times 221^{m^2},70 \times 22^{m},10 =$ 898.254

Diferencia de momentos.. . . . . 941.841

Distancia de la resultante al paramento. . . . . $d = \frac{941.841}{595.500} = 1^{m},58$

Distancia de la resultante al centro.. . . . . $x_1 = 3^{m},09 - 1^{m},58 = 1^{m},51$,

y para la presión máxima en la base

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4rx_1}{r^2 + r'^2}\right)$$

$$= \frac{595.500}{20.917}\left(1 + \frac{4 \times 1{,}51 \times 3{,}09}{12{,}438}\right) = 71.200 \text{ kil.}$$

Es oportuno advertir que si en la expresión de ρ cambiamos de signo el segundo término del paréntesis, se obtiene la presión mínima; pero es fácil ver que en el caso que estamos examinando este segundo término es superior á la unidad, y por lo tanto, resulta negativo el valor de ρ é igual á $-1^{k.},42$ por centímetro cuadrado. Esto indica que el cálculo del máximo

debe rehacerse, siendo preciso reducir por tanteo la superficie de base sujeta á presión, de modo que el mínimo de ésta sea cero. Esta reducción de base dará evidentemente lugar á una compresión unitaria superior á la que se obtuvo antes, la cual debía ya considerarse algo excesiva, tratándose de una fábrica de ladrillo.

Propongámonos determinar qué intensidad deberá tener el viento para que la presión en la extremidad del diámetro opuesto á su dirección sea nula. Para esto, basta resolver la ecuación

$$1 - \frac{4rx_1}{r^2 + r'^2} = 0,$$

de donde se deduce

$$x_1 = \frac{r^2 + r'^2}{4r} = \frac{12,438}{12,36} = 1^{\mathrm{m}},006.$$

Este valor de x_1 representa el radio del núcleo central, dentro de cuyo perímetro debe hallarse la resultante para que no se determinen presiones negativas. Adviértase que la cantidad $1^{\mathrm{m}},006$ es precisamente los dos tercios de 1,51, valor encontrado antes para la distancia de la resultante al centro, cuando actuaba el viento con una intensidad de 275 kilog. por metro cuadrado de superficie plana. Será, pues, necesario reducir esta intensidad en la misma relación, lo cual da lugar á un empuje de 183 kilogramos, cantidad bastante considerable aún y que corresponde á los huracanes.

En este caso se obtiene para la máxima presión

$$\rho = 2 \times \frac{595.500}{20.917} = 56.948,$$

es decir, el doble de la presión media. Puede admitirse esta presión para una fábrica hecha con buen ladrillo.

Con el empuje del viento de 275 kilogramos, resulta para el

coeficiente de estabilidad

$$c = \frac{1.840.095}{898.254} = 2,04;$$

si este empuje se reduce á 183 kilogramos, deberá multiplicarse el resultado anterior por $\frac{3}{2}$, lo que da para el coeficiente 3,06.

376. *Chimeneas de fábrica.*—Extractaremos del formulario de M. Claudel algunas indicaciones y datos relativos á la forma y dimensiones adoptadas para las grandes chimeneas de fábrica, las cuales se construyen generalmente de ladrillo, y cuya altura llega con frecuencia á ser considerable, según puede juzgarse por el ejemplo anterior.

Cuando las chimeneas tienen poca elevación, se las puede disponer prismáticas en el interior, reduciendo su espesor por retallos aparentes en el exterior; pero si presentan mucha altura, se les da una forma piramidal ó cónica, lo mismo exterior que interiormente.

El espesor de las grandes chimeneas es, por lo regular, de $0^m,22$ en la parte superior, es decir, del largo de un ladrillo (marca francesa); si la altura no es muy considerable, puede reducirse este grueso á $0^m,11$, ancho de un ladrillo; se disponen por dentro con un talud de $0^m,012$ á $0^m,018$ por metro, y por el exterior de $0^m,025$ á $0^m,035$. Como el espesor de la fábrica debe ir en disminución á medida que se considera un punto más alto, con objeto de no tener que cortar el ladrillo se construye la chimenea piramidal ó cónica por el exterior y con retallos de $0^m,11$ en el interior (fig. 186.)

Ya sea la chimenea cónica, ya piramidal, se hace el basamento prismático y por lo regular de sección cuadrada, con una altura de $3^m,50$ á $4^m,50$ por fuera del terreno y $2^m,50$ por debajo del mismo, para formar la cámara de llegada de humos; se establece este basamento sobre un macizo de hormigón, de uno á dos metros de grueso, que presenta una zarpa de $0^m,25$ á

$0^m,50$ alrededor de los paramentos exteriores. Se dispone en uno de los lados una abertura, que generalmente se cierra con un tabique de ladrillo, y facilita el ingreso en el interior de la chimenea, siempre que convenga limpiarla ó efectuar en ella alguna reparación.

Cuando la temperatura del humo no exceda de 300 grados, pueden construirse las chimeneas con ladrillo ordinario y mortero de cal y arena; el yeso solo debe emplearse para temperaturas inferiores á 100°. Cuando esta temperatura llega á 500°, debe hacerse el interior de la chimenea, especialmente la parte baja, con ladrillo refractario y mezcla de barro.

Se encontrarán en el mencionado formulario noticias más extensas. Copiamos de esta obra los dos siguientes cuadros relativos á las dimensiones de las chimeneas, según sea su altura.

NÚMERO 75

CUADRO *de dimensiones para chimeneas con destino á un gran establecimiento de construcción de máquinas de vapor. El espesor de la parte superior es de* 0^{m},11 *en todas las chimeneas.*

	Fuerza en caballos.	CHIMENEAS CIRCULARES DIÁMETRO INTERIOR		CHIMENEAS CUADRADAS LADO INTERIOR		Grueso abajo, por encima de la base.	Altura por encima de la base.	Altura de la base.
		Abajo.	Arriba.	Abajo.	Arriba.			
		m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
UN HERVIDERO	1	0,24	0,20	0,22	0,18	0,33	8	2,50
	2	0,41	0,25	0,38	0,22	0,33	10	3,00
	3	0,56	0,28	0,53	0,25	0,33	12	3,20
	4	0,60	0,30	0,57	0,27	0,33	14	3,40
	6	0,65	0,35	0,60	0,30	0,44	16	3,60
	8	0,74	0,40	0,67	0,35	0,44	18	3,80
	10	0,82	0,42	0,70	0,38	0,55	20	3,90
	12	0,88	0,44	1,04	0,40	0,55	22	4,00
DOS HERVIDEROS	15	1,04	0,48	1,055	0,425	0,55	24	4,20
	20	1,16	0,54	1,10	0,48	0,55	25	4,30
	25	1,22	0,60	1,15	0,53	0,55	25	4,30
	30	1,36	0,66	1,20	0,58	0,55	28	4,60
	35	1,40	0,70	1,32	0,62	0,66	30	4,80
	40	1,45	0,75	1,37	0,67	0,66	30	4,80
	45	1,50	0,80	1,42	0,72	0,66	30	5,00
	50	1,57	0,85	1,47	0,75	0,66	32	5,00
	60	1,62	0,90	1,52	0,80	0,77	34	5,20
	70	1,70	0,96	1,59	0,85	0,77	36	5,40
	80	1,78	1,04	1,66	0,92	0,77	36	5,40
	90	1,84	1,10	1,72	0,98	0,88	38	5,60
	100	2,01	1,15	1,88	1,02	0,88	40	5,80
	120	2,11	1,25	1,96	1,10	0,88	40	5,80
	150	2,16	1,40	1,98	1,22	0,99	42	6,00
	180	2,38	1,50	2,23	1,35	0,99	44	6,20
	200	2,60	1,60	2,40	1,40	0,99	46	6,40
	250	3,04	1,80	2,82	1,58	0,99	50	6,60
	300	3,32	2,00	3,07	1,75	1,10	55	7,00

NÚMERO 76

CUADRO *de espesores y alturas de las diferentes zonas verticales que componen las chimeneas. La* 1.ª *zona de la parte superior de la chimenea, tiene* 0m,11 *de grueso; la* 2.ª, *que está debajo,* 0,22; *la* 3.ª 0,33, *y así sucesivamente.*

Altura total de la chimenea.	1.ª — 0,11	2.ª — 0,22	3.ª — 0,33	4.ª — 0,44	5.ª — 0,55	6.ª — 0,66	7.ª — 0,77	8.ª — 0,88	9.ª — 0,99	10 — 1,10
m.	m.	m.	m.							
8	1,50	2,65	3,85							
10	1,80	3,30	4,90							
12	2,00	4,00	6,00							
14	2,50	4,50	7,00							
15	2,50	3,50	4,50	4,50						
16	2,50	3,50	4,50	5,50						
18	3,00	4,00	5,00	6,00						
20	2,80	3,40	4,00	4,60	5,20					
22	3,00	3,70	4,40	5,10	5,80					
24	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40					
25	3,30	4,15	5,00	5,85	6,70					
28	3,60	4,60	5,60	6,60	7,60					
30	3,00	3,80	4,60	5,40	6,20	7,00				
32	3,30	4,10	4,90	5,70	6,50	7,50				
34	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6,00	7,00			
35	3,00	3,50	4,50	5,00	5,50	6,00	7,50			
36	3,00	3,70	4,40	5,10	5,80	6,60	7,40			
38	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50		
40	3,00	3,55	4,10	4,65	5,20	5,80	6,50	7,20		
42	3,00	3,40	3,80	4,20	4,60	5,00	5,50	6,00	6,50	
44	3,00	3,45	3,90	4,35	4,80	5,30	5,80	6,40	7,00	
46	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,60	6,20	6,80	7,40	
50	3,20	3,70	4,20	4,80	5,40	6,00	6,70	7,50	8,50	
55	3,20	3,70	4,20	4,70	5,20	5,70	6,20	6,70	7,40	8,00

Los gruesos indicados en estos cuadros son múltiplos del ancho $0^m,11$ de un ladrillo; pero es preciso tener en cuenta el espesor de las juntas, que es de $0^m,005$ próximamente, de manera que la 3.ª zona compone un grueso de $0^m,34$, la 5.ª 0,57 ....., etc.

377. Según un estudio de M. Renaud (*Anales* de 1832), relativo á la caída de una chimenea en el Havre, resulta:

1.° Que puede despreciarse la resistencia debida á los morteros, y como compensación no es necesario preocuparse con la influencia de las oscilaciones.

2.° Que debe atenderse á los vendavales que, según las observaciones de M. Fresnel, producen un empuje de 150 kilogramos por metro cuadrado sobre la sección meridiana de una chimenea piramidal. En ciertas localidades, dicho empuje puede llegar hasta 170 kilogramos.

Admitamos que el vacío interior de una chimenea forma un tronco de cono ó de pirámide, cuyas bases son las secciones inferior y superior, lo cual es suficientemente aproximado, y llamemos

A, el lado ó el diámetro exterior de la base;
a, el lado ó el diámetro exterior de la coronación;
A′ y a′, las dimensiones homólogas interiores;
H, la altura de la chimenea;
δ′, el peso del metro cúbico de fábrica.

Si la chimenea es cuadrada, tendremos para su peso

$$P = \frac{1}{3} H (A^2 + a^2 + Aa - A'^2 - a'^2 - A'a')\delta',$$

y como este peso tiene un brazo de palanca igual á $\frac{A}{2}$, resulta para el momento

$$\mathcal{M} P = \frac{1}{6} H (A^2 + a^2 + Aa - A'^2 - a'^2 - A'a') A\delta'.$$

La intensidad del empuje del viento está representada por

$$\frac{A + a}{2} H \times 150^{k.};$$

y esta fuerza actúa con un brazo de palanca (**316**)

$$\frac{1}{3} H \frac{A + 2a}{A + a},$$

que expresa la distancia de la base al centro de gravedad de la sección meridiana. Se obtiene, pues, para el momento del empuje.

$$\mathcal{M} Q = \frac{1}{6} H^2 (A + 2a) \times 150;$$

de modo que tendremos para el coeficiente de estabilidad

$$c = \frac{(A^2 + a^2 + Aa - A'^2 - a'^2 - A'a')\, A\delta'}{150 \times H\, (A + 2a)}.$$

Tratándose de una chimenea circular, hay que multiplicar el peso anteriormente obtenido por $\frac{\pi}{4}$ y el empuje por $\frac{2}{3}$, lo que da

$$c = \frac{3\pi\, (A^2 + a^2 + Aa - A'^2 - a'^2 - A'a')\, A\delta'}{8 \times 150 \times H\, (A + 2a)}.$$

Haciendo $\delta' = 1.600$ kilog., se halla:
para una chimenea cuadrada

$$c = 10{,}677\, \frac{(A^2 + a^2 + Aa - A'^2 - a'^2 - A'a')\, A}{H\, (A + 2a)};$$

y para una chimenea cónica

$$c = 12{,}566\, \frac{(A^2 + a^2 + Aa - A'^2 - a'^2 - A'a')\, A}{H\, (A + 2a)};$$

así es que á igualdad de dimensiones, una chimenea circular presenta una estabilidad superior en $\frac{1}{5}$ próximamente á la de una chimenea cuadrada.

Podría añadirse que la chimenea circular produce una economía de fábrica de algo más de $\frac{1}{5}$, puesto que los volúmenes de ambas formas se hallan en la relación $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$. Se observa en el primero de los cuadros anteriores que se asigna al diámetro de la chimenea circular, y á igualdad de altura, mayor longitud que al lado de la chimenea rectangular. A pesar de esto, resulta siempre más económica la primera forma.

378. Según M. Claudel, los cálculos que se han hecho para cierto número de chimeneas dan lugar á las siguientes observaciones, que dejarían de ser exactas con otro valor de δ':

1.ª Los constructores fijan las dimensiones más bien por sentimiento que por reglas precisas, pues los coeficientes de estabilidad varían de 1 á 3.

2.ª La regla empírica que con frecuencia se adopta, y consiste en establecer un talud exterior de 25 á 30 milímetros por metro, una vez que se ha fijado la sección superior, no tiene una importancia absoluta; debe más bien considerarse dicho talud como derivado de una inspiración arquitectónica. Este mismo talud, de $0^m{,}025$ á $0^m{,}030$, es el que da *M. Mordling* á sus pilas metálicas.

3.ª La existencia de algunas chimeneas construídas con el coeficiente 1, las cuales resisten, indica que varios constructores han sido inducidos á adoptar las dimensiones que corresponden al mínimo posible, y confirma el valor de 150 kilogramos como máximo.

4.ª Es imprudente descender por bajo del coeficiente 1, aunque se emplee buena fábrica; ninguna de las construcciones conocidas puede autorizar semejante atrevimiento.

379. Se ve por lo que antecede, que al estudiar la estabilidad de la torre, solo se ha tenido en cuenta el movimiento de

giro, prescindiendo por completo de la resistencia de la obra al aplastamiento, resistencia que conviene mucho conocer y vamos á examinar.

Consideremos las dos chimeneas cuadrada y circular indicadas en el cuadro para una altura de 50 metros.

Los datos de la primera son como sigue:

$$A = 4^m,80, \quad A' = 2^m,82, \quad a = 1,80, \quad a' = 1,58, \quad H = 50^m.$$

Adoptaremos para empuje del viento la cantidad de 150 kilogramos por metro cuadrado de superficie plana, y la de 1.600 kil. para el peso del metro cúbico de fábrica de ladrillo. Se obtiene

Peso de la torre. $P = (A^2 + a^2 + Aa - A'^2 - a'^2 - A'a')\frac{H}{3}\delta' = 553.856^k$

Momento del peso. . . . $\mathcal{M}P = P \times \frac{A}{2} = 553.856 \times 2,40 = 1.281.254$

Momento del empuje. . . $\mathcal{M}Q = \frac{H^2}{6} \times 150^k \times (A + 2a) = 525.000$

Suma algebráica de momentos. . . . . $= 756.254$

Distancia de la resultante al punto de giro

$$d = \frac{756.254}{533.856} = 1^m,41.$$

Distancia de la misma resultante al centro

$$x_1 = \frac{A}{2} - d = 2^m,40 - 1^m,41 = 0^m,99.$$

Area de la base. . . . . . $\Omega = A^2 - A'^2 = 15,09$

Momento de inercia. . . . . $I = \frac{1}{12}(A^4 - A'^4) = 38,97$

Y por último, se halla para la presión máxima en la base (**18**)

$$\rho = P\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{x_1 \frac{A}{2}}{I}\right) = 533.856\,(0{,}066 + 0{,}061) = 67.800\text{kil.}$$

Se ve fácilmente que la presión mínima es también positiva, aunque muy pequeña, pues el segundo término del paréntesis tiene casi el mismo valor que el primero.

Se obtiene el coeficiente de estabilidad dividiendo el momento del peso por el momento del empuje y resulta

$$c = \frac{1.281.254}{525.000} = 2{,}44.$$

Los datos para la chimenea circular son:

$$A = 5^{m},02, \quad A' = 3^{m},04, \quad H = 50^{m}.$$
$$a = 2{,}02, \quad a' = 1{,}80,$$

Se reducirá el empuje del viento á los $\frac{2}{3}$, y tendremos:

Peso de la torre. . . $P = \frac{\pi}{4}\,(A^2 + a^2 + Aa - A'^2 - a'^2 - A'a')\,\frac{H}{3}\,\delta' =$ 449.440

Momento del peso. . . $\mathcal{M}P = P\,\frac{A}{2} = 449.440 \times 2{,}51 = 1.128.094$

Momento del empuje. . $\mathcal{M}Q = \frac{100}{6}\,H^2\,(A + 2a) =$ 377.500

Suma algebráica de momentos. 750.594

Distancia de la resultante al punto de giro

$$d = \frac{750.594}{449.440} = 1^{m},67.$$

Distancia de la resultante al centro de la base

$$x_1 = \frac{A}{2} - d = 2{,}51 - 1{,}67 = 0{,}84.$$

Area de la base. . . . . . . $\Omega = \frac{\pi}{4}(A^2 - A'^2)$

Momento de inercia de la base. $I = \frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{A}{2}\right)^4 - \left(\frac{A'}{2}\right)^4\right]$

Por último, se halla para la presión máxima en la base (**18**)

$$\rho = \frac{P}{\Omega}\left[1 + \frac{4 \times \frac{A}{2} x_1}{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{A'}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{449.440}{12{,}53}\left(1 + \frac{4 \times 2{,}51 \times 0{,}85}{8{,}61}\right) = 70.877.$$

La presión mínima es también positiva.

Se obtiene para el coeficiente de estabilidad

$$c = \frac{1.128.094}{377.500} = 2{,}99.$$

380. Comparando los resultados hallados para las chimeneas cuadradas con los relativos á la forma circular, se ve que bajo el punto de vista del movimiento de giro, estas últimas ofrecen efectivamente mayor resistencia que las primeras, puesto que el coeficiente de estabilidad es ahora 2,99, en vez de 2,44 que era antes; pero por otro lado, la presión en la base ha aumentado al mismo tiempo, es decir, que la resistencia de aplastamiento ha disminuído al pasar de la forma cuadrada á la circular. Pero es precisamente bajo el punto de vista de esta resistencia que conviene considerar esta clase de edificios; no es posible, pues, decir de un modo absoluto que las chimeneas

cónicas resistan más que las piramidales. Las primeras conservan siempre la ventaja de un menor volumen de fábrica; pero fácilmente podría verse que haciendo el sacrificio de esta ventaja, es decir, á igualdad de volumen, las chimeneas circulares serán, bajo todos conceptos, más resistentes que las cuadradas.

Las presiones máximas que en cada caso se han obtenido en la base son admisibles, si se esmera la mano de obra y se emplea buen ladrillo; pero se ha partido de un empuje del viento de 150 kilogramos por metro cuadrado, empuje susceptible de considerarse como límite superior, en muchas localidades en que la obra no se halla expuesta á los grandes huracanes; no siendo así, la presión en la base tomaría un valor demasiado crecido, siendo entonces prudente aumentar el talud exterior de la chimenea y conservar al propio tiempo la misma sección interior. Los modelos del cuadro ofrecen un talud de $0^{m},030$ por metro, que podría sustituirse en semejante caso por el de 0,037, como en la chimenea de *Alais*.

MUROS DE EDIFICIOS

381. Los espesores asignados á los muros que forman parte de un edificio público ó particular varían entre límites bastante extensos, pues dependen de la disposición y altura del muro, sistema de construcción, materiales empleados, esmero en la mano de obra y, por último, de cierta rutina adoptada en cada localidad. Es, pues, difícil establecer reglas generales; indicaremos, sin embargo, las que propone Rondelet y son admitidas por muchos constructores.

Las reglas de este eminente arquitecto han sido deducidas del examen de un número considerable de importantes construcciones antiguas y modernas, y se aplican:

1.° A los muros unidos por suelos y formando varios pisos;
2.° A los muros simplemente cubiertos con una techumbre;
3.° A los muros de cerca sin cubierta.

382. *Muros con pisos.*—Constituyen estos muros los de

fachada y los de carga ó muros divisorios. Observa Rondelet que en los casos ordinarios, en donde los pisos no exceden de $3^m,90$ á $4^m,87$ de altura, se determina el espesor de estos últimos muros teniendo en cuenta la longitud del espacio que dividen y el número de pisos que deben sostener; pero tratándose de los muros de fachada, que se encuentran aislados en toda su altura por la parte exterior, es preciso atender al ancho del edificio y á esta altura.

Para un cuerpo de vivienda sencillo, en el que las piezas ocupan todo el ancho ó profundidad t de la planta, se obtiene el grueso de los muros de fachada, añadiendo á este ancho la mitad de la altura total hasta el alero del tejado, y tomando $\frac{1}{24}$ de la suma. Por lo tanto, designando por e dicho grueso, que debe considerarse encima del zócalo del piso bajo, se tiene

$$e = \frac{t + \frac{h}{2}}{24} = \frac{t}{24} + \frac{h}{48}.$$

Si la crujía es doble, es decir, si está dividida la planta en dos partes por un muro paralelo á los de fachada, se calculará el espesor de estos últimos agregando al ancho total t' del edificio la altura h, y tomando $\frac{1}{48}$ de la suma. Equivale esto á

$$e = \frac{t' + h}{48} = \frac{t'}{48} + \frac{h}{48}.$$

Es evidente que si el ancho del edificio doble es igual á dos veces el ancho del edificio sencillo, es decir, si se verifica $t' = 2t$, el grueso de los muros de fachada será el mismo en los dos casos.

Para una construcción de mediana estabilidad se añadirá 0,027 al resultado de estas fórmulas, y para una construcción de gran resistencia 0,054.

Las anteriores fórmulas equivalen á tomar $\frac{1}{24}$ del ancho de crujia, y añadirle $\frac{1}{48}$ de la altura. Podremos aplicar esta regla á una construcción de varios pisos, y se obtendrá el grueso del muro por encima de cada solado, haciendo sucesivamente h igual á la altura de la techumbre sobre dicho solado.

Así, por ejemplo, si tomamos una misma altura de 4 metros para cada piso de una casa, comprendiendo en la altura el espesor del solado, y admitiendo que el ancho de la crujía contigua á la fachada sea de 6 metros, resulta para el grueso del muro exterior en cada piso:

Para el primero, contando desde arriba. . . . . $e = 0,32$
» el segundo, » » » . . . . . . $e = 0,42$
» el tercero, » » » . . . . . . $e = 0,50$
» el cuarto, » » » . . . . . . $e = 0,58$
» el quinto, » » » . . . . . . $e = 0,67$
» el sexto, » » » . . . . . . $e = 0,75$

No suelen adoptarse dimensiones inferiores á las que acabamos de citar, sobre todo para edificios de alguna importancia y aun para casas particulares. Así, por ejemplo, en Madrid, en donde se emplea en las fachadas ladrillo que no es de la mejor calidad, se adopta con frecuencia un grueso de muro igual á tres anchos de ladrillo (0,42) en el piso superior, aumentando este grueso de un ancho de ladrillo (0,14) á medida que se baja.

Resulta así:

Grueso en el piso superior. 0,42
» en el 2.°, bajando.. 0,56
» en el 3.°, » 0,70
» en el 4.°, » 0,84
» en el 5.°, » 0,98
» en el 6.°, » 1,12

Esta regla no es invariable, así es que también se da á veces

al piso de arriba el mismo grueso de 0,56 que al que le sigue, sobre todo cuando la carpintería de la techumbre no se halla atirantada, ó está compuesta de maderos simplemente apoyados sobre el muro.

383. Examinaremos las condiciones de resistencia de estos muros, y para ello se determinará la presión unitaria en la base de cada piso, partiendo de los datos siguientes:

$\delta' = 1.800$ kilog., para el peso del metro cúbico de fábrica;

$p = 500$ kilog. por metro cuadrado de suelo, comprendiendo la sobrecarga.

$t = 5^m,00$, luz de la crujía entre los dos muros;

$h = 4^m,00$, altura de cada piso con el grueso del solado.

Designaremos además por n el número de pisos, y por e el grueso del muro en el piso que se considere; se admitirá además que el último piso de arriba sustenta un suelo de desván, pesando los mismos 500 kilog. por metro cuadrado, y también la techumbre con igual peso.

La presión unitaria en la base del muro, admitiendo un número n de pisos, estará dada por la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{p\,(n+1)\,\frac{t}{2} + \mathrm{P} + eh\delta'}{e},$$

en la cual e designa el espesor que corresponde al piso de abajo, y P el peso del muro de fachada por encima de este piso.

Haciendo sucesivamente $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ....., etc., y calculando el valor de P para cada piso, valor que es nulo para el primero de arriba, se obtienen los resultados que indica el siguiente cuadro, y que corresponden á los dos casos arriba mencionados de espesores menores y mayores.

NÚMERO 77

CUADRO *de presiones unitarias en la base de los muros de fachada para casas con varios pisos.*

Número del piso.	ESPESORES MENORES		ESPESORES MAYORES	
	Espesor.	Presión unitaria.	Espesor.	Presión unitaria.
n	e	ρ	e	ρ
	m.	k.	m.	k.
1	0,33	14.775	0,42	13.152
2	0,42	21.785	0,56	19.296
3	0,50	28.000	0,70	24.423
4	0,58	33.482	0,84	29.040
5	0,67	38.050	0,98	33.367
6	0,75	42.858	1,12	37.515

Las presiones que señala este cuadro, en uno como en otro caso, son admisibles; pero hay que advertir que se han calculado en la hipótesis de que el muro es completamente macizo, sin puertas ni ventanas; si se tienen en cuenta estos vanos, es cierto que por un lado se conseguirá una pequeña disminución en el peso total, pero por otro la presión unitaria en los entrepaños aumentará con motivo de la reducción de superficie. Así, por ejemplo, si los entrepaños presentan un ancho igual al de las ventanas, la presión por metro cuadrado se acercará al doble de los resultados del cuadro.

Se ve también que el grueso del muro en los diferentes pisos no se halla en relación con la carga que sustentan; existe evidentemente un exceso de espesor en la parte alta, en donde la presión por centímetro cuadrado no llega á 1,50 kil.

Si se quisiera disponer el muro de modo que sufriese la misma presión unitaria en cada piso, igual, por ejemplo, á 30.000 kilogramos por metro cuadrado, no habría más que calcular el espesor, deduciéndolo de la anterior expresión de ρ, después de reemplazar esta letra por el tipo fijado y empezando por el piso

de arriba, después del cual se pasaría al inmediato inferior, y así sucesivamente.

Se obtienen de este modo los siguientes gruesos:

En el 1.er piso de arriba	. . . .	$e = 0{,}11$
» 2.º » »	. . . .	$e = 0{,}20$
» 3.º » »	. . . .	$e = 0{,}32$
» 4.º » »	. . . .	$e = 0{,}47$
» 5.º » »	. . . .	$e = 0{,}68$
» 6.º » »	. . . .	$e = 0{,}95$

Estos espesores darían lugar, especialmente en la parte alta, á una notable economía que, sin embargo, no se utiliza, pues pondría al edificio en malas condiciones de abrigo contra las influencias atmosféricas. No suelen darse gruesos inferiores á los que resultan de aplicar la fórmula de Rondelet.

384. Para determinar el espesor de un muro interior de carga, propone el mismo arquitecto añadir á la altura del piso la distancia que separa los dos muros paralelos, entre los que está situado el muro de carga, y tomar luego $\frac{1}{36}$ de la suma. El resultado está dado por la expresión

$$e = \frac{t + h}{36}.$$

Corresponde este grueso al piso superior del edificio; para los demás se añadirá media pulgada ($0^m{,}013$) por piso, á medida que aumenta su número. La proporción que acabamos de indicar es conveniente cuando se emplea en la fábrica ladrillo ó piedra medianamente dura; si ésta es floja ó constituye la toba que se usa en algunas localidades, en vez de media pulgada, se añadirá una pulgada por piso.

Si hacemos $t = 10^m{,}40$ (doble crujía);
$h = 4{,}00$;
$p = 500$ kil.
$\delta' = 1.800$ kil.

podremos calcular la presión en la base de cada piso y formar el cuadro que sigue.

NÚMERO 78

CUADRO *de presiones en la base de cada piso para los muros interiores de carga.*

Número de pisos. n	Espesor del muro de carga. e	Presión por metro cuadrado. ρ
	m.	K.
1	0,40	19.700
2	0,41	32.517
3	0,43	44.018
4	0,44	55.900
5	0,45	67.413
6	0,47	77.064

Los vanos de puertas podrán ocasionar algún aumento de presión unitaria, pero será este aumento menor que en las fachadas.

Se advierte que dicha presión crece rápidamente con el número de pisos; procede esto de la escasa variación de espesor de los muros, y de la fuerte carga que introduce cada piso. Parece, pues, lógico proporcionar este espesor al peso; si, por ejemplo, quisiéramos obtener una presión de 50.000 kil. por metro cuadrado, al nivel de todos los suelos, sería preciso fijar los siguientes gruesos de muro:

En el 1.er piso de arriba. . . . . $0^m,12$
» 2.º » » 0,20
» 3.º » » 0,28
» 4.º » » 0,39
» 5.º » » 0,51
» 6.º » » 0,68

Estos resultados indican que los espesores deducidos de la regla de Rondelet son susceptibles de disminución en la parte alta. En algunas localidades donde se emplean buenos materiales, solo se da á los muros de carga de los pisos supe-

riores $0^m,14$, es decir, un ancho de ladrillo (marca española).

385. Según Rondelet, cuando el muro de carga constituye un entramado de madera relleno con cascote y yeso, y enlucido por ambas caras, formando un solo cuerpo, basta darle la mitad del grueso que señala su regla.

Para un tabique ligero que no sostiene piso, la cuarta parte es suficiente.

386. Terminaremos lo relativo á los muros con pisos, exponiendo el siguiente cuadro de espesores, copiado del citado formulario de Claudel.

NÚMERO 79

CUADRO *de espesores en uso para los muros que forman las casas de mediana latitud y de una altura de 3 á 4 pisos.*

DESIGNACIÓN DE LAS PARTES DE LOS MUROS	MUROS		Altura del piso.
	De fachada.	De carga.	
	m. m.	m. m.	
En los cimientos.	0,75 á 1,00	0,70 á 0,85	
Al nivel del solado. . . En los sótanos.. .	0,55 á 0,80	0,50 á 0,65	
Al nivel del solado. . . En el piso bajo.. .	0,50 á 0,65	0,35 á 0,40	m. m.
Al nivel del piso. . . . En el 1.er piso.. .	0,45 á 0,55	»	3,25 á 5,00
Al nivel del piso. . . . » 2.° » .. .	0,40 á 0,50	0,30 á 0,35	3,00 á 4,25
Al nivel del piso. . . . » 3.° » .. .	0,32 á 0,40	0,25 á 0,30	2,80 á 3,50

DESIGNACIÓN DE LOS EDIFICIOS	ESPESOR EN EL PISO BAJO DE LOS MUROS DE		
	Fachada.	Medianería.	De carga.
	m. m.	m. m.	m. m.
Edificios de más importancia que las casas ordinarias. .	0,65 á 1,00	0,55 á 0,65	0,40 á 0,55
Palacios ó edificios con bóvedas en el piso bajo. . . .	1,20 á 2,50	1,00 á 1,50	0,70 á 1,20

387. *Muros de edificios cubiertos con una simple techumbre.*—Para llegar á establecer una regla que determine el es-

pesor de los edificios que no están abovedados, admite Rondelet, que hallándose colocados los tirantes de las armaduras del tejado en sentido del ancho de estos edificios, como sucede con los maderos de suelo, deben establecer estos tirantes un enlace entre los dos muros opuestos; pero en vista de la elasticidad y flexibilidad inherentes á la madera, no dejarán de fatigar á dichos muros, tanto más, cuanto más separados se hallen, de donde deduce que para fijar su espesor debe atenderse á la latitud y altura de las habitaciones.

Según esto, en los edificios cubiertos con solo una techumbre, si los muros se encuentran aislados por ambas caras y en toda su altura, hasta los apoyos de las formas, como indica la figura 187, se hallará el espesor de estos muros empleando el siguiente procedimiento gráfico. Después de trazar la diagonal BD, llévese sobre ella, de B á M, $\frac{1}{12}$ de la altura AB; luego por M se trazará la horizontal MN, que representa en magnitud el espesor buscado.

Se obtiene el mismo resultado con una fórmula fácil de establecer. Llamemos

t, la latitud AD del edificio;
H, la altura AB;
e, el espesor MN.

Es evidente que tendremos

$$BM = \frac{1}{12} H \qquad y \qquad BD = \sqrt{H^2 + t^2},$$

y en razón de la semejanza de los dos triángulos BNM y BAD,

$$e = \frac{H}{12} \times \frac{t}{\sqrt{t^2 + H^2}},$$

que es la fórmula indicada.

Si los muros que sostienen la techumbre se encontrasen apoyados á cierta altura con otras construcciones ó tejados más

bajos, según se verifica en las iglesias en forma de Basílica (fig. 188), se llevará sobre la diagonal BD, de B á M, $\frac{1}{24}$ de la suma que se obtiene agregando á la altura total AB, la altura BC por encima del apoyo. La horizontal MN dará siempre el grueso del muro.

Se verá fácilmente que la regla anterior equivale á emplear la fórmula

$$e = \frac{H + h}{24} \times \frac{t}{\sqrt{t^2 + H^2}} ;$$

en la que H es la altura total AB y h la altura BC. Las demás letras tienen la significación antedicha.

En todos los casos podremos hacernos cargo de la resistencia que un edificio de esta naturaleza ofrece al aplastamiento de la fábrica, en cuanto se conozca el peso de las techumbres. En efecto; si p designa la carga del muro por metro lineal de edificio, hallaremos la presión unitaria en la base aplicando la fórmula

$$\rho = \delta' H + \frac{p}{e} .$$

388. *Muros de cerca.*—Distingue Rondelet tres grados de estabilidad: una fuerte, otra mediana y una tercera menor. Según las observaciones deducidas del examen de un gran número de edificios de todas clases, resulta que se obtiene para el muro una fuerte estabilidad, dándole por grueso la octava parte de su altura; con el décimo de la misma se consigue una estabilidad media, y por último, el doceavo corresponde al menor grado de estabilidad que conviene dar al muro.

Sin embargo, como en la composición de edificios se combinan los muros unos con otros, consolidándose mútuamente, resulta que á veces con menos espesor puede conseguirse la suficiente estabilidad. Así, por ejemplo, los muros que encierran

un espacio rectangular ó de forma poligonal cualquiera, se sostienen mútuamente en sus extremidades, y cada uno de ellos exige un grueso tanto más pequeño, cuanto menor es su longitud.

Se hallará entonces el espesor por el siguiente método gráfico, que es análogo al que se aplica á los muros cubiertos con techumbre.

Sea ABCD (fig. 189) la planta rectangular de un cercado; sobre una horizontal se llevará en EF la longitud del muro mayor AB ó DC, y sobre la vertical EL la altura del mismo; trácese la diagonal LF, sobre la que se tomará Lm igual al octavo, al décimo ó al doceavo de la altura EL, según el grado de estabilidad que quiera obtenerse; la horizontal mp dará el espesor del muro AB ó del DC.

Si se trata del muro pequeño del rectángulo, se hará EG igual á BC; sobre la diagonal LG se llevará la misma fracción $Ln = Lm$ de la altura, y solo quedará por trazar la horizontal ns, que representará el grueso del muro menor.

Si el número de muros de igual altura y de diferente longitud, pertenecientes á una misma cerca poligonal, fuese mayor, tendríamos una serie de diagonales distintas, LF, LG ..., etcétera, correspondientes á estos muros, y sobre las que debería llevarse una misma fracción de la altura. Podría efectuarse esto trazando un arco de círculo mno con un radio igual á dicha fracción y desde L como centro. Las horizontales mp, ns ..., darían los espesores de cada muro.

Si designamos por $\frac{1}{m}$ la fracción de la altura, variable con el grado de estabilidad, por l la longitud del muro y por H su altura, conseguiremos también el mismo espesor obtenido con la regla gráfica, aplicando la fórmula

$$e = \frac{H}{m} \times \frac{l}{\sqrt{l^2 + H^2}}.$$

Cuando el espacio cercado tiene la forma de un polígono re-

gular, el espesor del muro deberá ser, según la regla de Rondelet, tanto más pequeño, cuanto mayor sea el número de lados del polígono, puesto que á medida que aumenta este número, decrece la longitud de cada lado; de aquí resulta que, si el polígono se convierte en un círculo, el grueso del muro deberá ser infinitamente pequeño. Este resultado está de acuerdo con lo que se observa arrollando una hoja de papel en forma de cilindro, la cual presenta entonces cierto grado de estabilidad, de que carece hallándose desplegada.

Sin embargo, como los mnros se componen de materiales susceptibles de disgregación, es preciso darles cierto espesor para que puedan subsistir y conservarse. Para esto, y á los efectos de la aplicación de la regla, podrá considerarse el circuito circular como un polígono regular de doce lados, ó bien, por más sencillez, se determinará el espesor como correspondiendo á un muro recto, cuya longitud sea igual á la mitad del radio. Dicho espesor se hallará representado en este caso, por la fórmula

$$e = \frac{H}{m} \times \frac{\frac{r}{2}}{\sqrt{\frac{r^2}{4} + H^2}}.$$

en la que r expresa el radio del círculo.

389. Los espesores obtenidos con la regla de Rondelet pecan de escasos cuando proceden de aplicar esta regla á alturas de 2 á 3 metros, alturas bastante frecuentes para los muros de cerca; pues aun adoptando el coeficiente $\frac{1}{8}$ que corresponde á una fuerte estabilidad, solo se consiguen espesores comprendidos entre $0^m,25$ y $0^m,37$. Para poder construir un muro con semejantes espesores, es necesario emplear ladrillo ó materiales escogidos; haciéndolo con mampostería ordinaria, no suele darse menos de $0^m,40$.

No sucede lo mismo cuando el muro tiene una altura de 7 á

8 metros, como algunas antiguas construcciones, que han servido de tipo al citado arquitecto para deducir la regla; son en semejante caso aceptables los espesores, pudiendo aún alcanzar un valor demasiado crecido si la altura es considerable. Procede esto de que la resistencia de un muro aislado no es proporcional á la relación existente entre el grueso y la altura, según vamos á ver.

Para poder apreciar la estabilidad de esta clase de muros, que no están unidos con suelos ni con techumbres, es forzoso tener en cuenta la acción del viento que tiende á derribarlos. Sea p el empuje del viento por metro cuadrado de superficie; tendremos para la ecuación de equilibrio entre la potencia y la resistencia

$$\frac{p\,H^2}{2} = \frac{e^2 H \delta'}{2},$$

de donde se deduce

$$e = \sqrt{\frac{pH}{\delta'}} \quad [a] \qquad \text{y} \qquad p = \frac{e^2 \delta'}{H} \quad [b].$$

La fórmula [a] demuestra que, á igualdad de empuje, el espesor necesario crece como la raíz cuadrada de la altura. Si en la misma fórmula hacemos $p = 150$ kilog., valor generalmente admitido, y tomamos además 2.000 kil. para el peso de la fábrica por metro cúbico, obtendremos para un muro de 3 metros de altura un grueso de 0,47 en vez de 0,37 que da la regla de Rondeler con la relación de $\frac{1}{8}$; indica esto que tratándose de una altura de 3 metros ó menor, convendría tomar $\frac{1}{6}$ para esta relación.

Haciendo en la fórmula [b]

$$e = 0^{m},37, \quad H = 3^{m},00 \quad \text{y} \quad \delta' = 2.000^{k},$$

se deducirá para la intensidad del viento $p = 68$. Como en la práctica este empuje ha de verse sobrepujado con frecuencia,

resulta que no dando más espesor, á un muro de 3 metros de altura, que $\frac{1}{8}$ de la misma, podrá no obtenerse la conveniente estabilidad.

Si aplicamos la fórmula [a] á un muro de 9 metros de altura, con los mismos datos $p = 150^{k.}$ y $\delta' = 2.000^{k.}$, se obtiene para el grueso $e = 0^{m},82$, cantidad que constituye $\frac{1}{11}$ de la altura, ó casi la relación que Rondelet considera como la mínima admisible; y en efecto, el muro no podrá resistir al empuje de 150 kilog. más que en virtud de la cohesión de la fábrica.

390. Examinemos ahora la resistencia que ofrece al aplastamiento un muro de cerca sometido á la acción del viento. Se determinará para esto la distancia de la resultante á la arista de giro por medio de la expresión

$$d = \frac{\mathcal{M}P - \mathcal{M}Q}{P} = \frac{e^2\delta' - pH}{2e\delta'}.$$

La segunda de las fórmulas del trapecio dará para la presión máxima en la base

$$\rho = \frac{2P}{3d} = \frac{2e\delta' H}{3d};$$

eliminando d, resulta

$$e = \sqrt{\frac{3\rho p H}{3\rho\delta' - 4\delta'^2 H}}.$$

Tomemos 10 kilog. para la presión máxima en la base por centímetro cuadrado, presión que es ya bastante crecida; es decir, hagamos $\rho = 10.000$ y además $H = 3^{m},00$, $p = 150$ kil., $\delta' = 2.000^{k.}$; la fórmula anterior da

$$e = 0^{m},49,$$

ó sea $\frac{1}{6}$ de la altura.

Para $H = 9^m,00$, se halla $e = 0^m,92$, ó algo más de $\frac{H}{10}$.
Conviene advertir que la altura de un muro aislado sometido al empuje del viento, tiene un límite del que no puede excederse sin que resulte un grueso imaginario. Se determina este límite resolviendo la ecuación obtenida al igualar á cero el denominador de la anterior expresión de e, lo que da

$$H = \frac{3\rho}{4\delta'}.$$

Haciendo $\rho = 100.000^k$ y $\delta' = 2.000^{k.}$, resulta $H = 37^m,50$.

Si no existiera la presión del viento, la altura límite sería

$$H = \frac{\rho}{\delta'},$$

que para los mismos valores anteriores de ρ y de δ', daría

$$H = 50 \text{ metros}.$$

ERRATAS PRINCIPALES

Página.	Línea.	Dice.	Debe decir.
34	6	(328)	(318)
»	14	teorema	teorema, y haciendo AC $=$ b,
54	20	$K''N'$	$O'N'$
63	19	(figura 20)	(figura 26)
79	6	[33]	[43]
84	16	[44]	[44']
98	19	$m = \text{tang } \theta = 0,$	$m = \text{tang. } \theta = 0, \text{ y } n = 0,$
115	16	1.600 para	1.600 kil. para
»	17	2.200 id.	2.200 íd. íd.
265	8	6 000 x	6.600 x
»	penúltima	$\frac{d'}{B} = \frac{2,82}{7,17}$	$\frac{d'}{B} = \frac{2,82}{7,17} = 0,39$
268	17	4994.026	4 994.026
271	última	60 227	60.067
272	7	890.401	890.414
389	12	ángulo, descrita	ángulo descrito
393	15	δ	δ'
394	7	e^3	e^2
401	6.ª colum.	1,35	1,28
402	4.ª colum.	11,78	11,74
»	Id.	22,74	22,78
489	18.ª colum.	4,30	4,80
503	10	0,18 H^3	0,18 H^2